

**УДК 62-50**  
**ББК**

**А**

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ с примерами на языке MATLAB<sup>R</sup>.**

**/ Б.Р. Андриевский, А.Л.Фрадков – СПб.: Наука, 2000.**  
**– 475 с., ил. 86**

ISBN 5-02-024873-8

В книге рассмотрены основные положения метода пространства состояний в теории линейных динамических систем а также применение этого метода к задачам нелинейного и адаптивного управления, в том числе исследования колебательных и хаотических процессов. Приведены способы преобразования динамических моделей, содержатся сведения о вычислительных методах анализа систем. Изложены основные результаты теории оценивания и модального управления. С позиций метода пространства состояний рассмотрены свойства нелинейных систем и методы их исследования. Приводятся сведения о системах с переменной структурой и адаптивных системах управления, а также о задачах управления колебательными и хаотическими процессами. Изложение сопровождается примерами и упражнениями на языке MATLAB, который широко применяется для научно-инженерных расчётов в ведущих зарубежных и отечественных университетах. Книга даёт представление как о сегодняшнем состоянии базовых разделов теории управления, так и о некоторых новых и новейших её достижениях.

Предназначена для студентов, аспирантов и слушателей факультетов повышения квалификации, изучающих курсы "Теория автоматического управления", "Теория систем", "Проектирование систем управления", "Моделирование систем", а также для преподавателей, инженеров и научных работников, интересующихся вопросами анализа и синтеза динамических систем.

Рецензенты: С.Д. Земляков, В.В. Малышев

ISBN 5-02-024873-8

- © Центр "Интеграция", 2000 г.
- © Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков, 2000 г.
- © Л.А. Яценко – оформление, 2000 г.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

0.1. ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	11
<b>ГЛАВА 1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ</b>	<b>15</b>
1.1. <b>Динамические и статические системы. Понятие состояния динамических систем</b> . . . . .	15
1.2. <b>Уравнения состояния линейных систем</b> . . . . .	19
1.3. <b>Линеаризация уравнений состояния</b> . . . . .	21
1.4. <b>Примеры уравнений состояния систем</b> . . . . .	24
1.4.1. Электротехнические устройства . . . . .	24
1.4.2. Летательные аппараты . . . . .	27
1.4.3. Механические конструкции . . . . .	30
1.4.4. Цифровые устройства . . . . .	33
1.5. <b>Передаточные функции и их определение по уравнениям состояния</b> . . . . .	34
1.5.1. Передаточные функции линейных систем	34
1.5.2. Алгоритмы вычисления передаточных функций . . . . .	36
1.5.3. Примеры перехода к передаточным функциям от уравнений состояния . . . . .	38
1.6. <b>Частотные характеристики</b> . . . . .	46
1.6.1. Частотные характеристики непрерывных систем . . . . .	46
1.6.2. Частотные характеристики дискретных систем . . . . .	48
1.6.3. Частотные характеристики цифровых систем реального времени . . . . .	50
1.6.4. Примеры расчета частотных характеристик . . . . .	51
1.7. <b>Уравнения состояния при соединении систем</b>	58
1.7.1. Независимые подсистемы . . . . .	58
1.7.2. Последовательное соединение . . . . .	59
1.7.3. Соединение с обратной связью . . . . .	59
1.8. <b>Преобразование базиса</b> . . . . .	60
1.9. <b>Задачи и упражнения</b> . . . . .	64

<b>ГЛАВА 2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ</b>	<b>67</b>
2.1. Диагональная и жорданова формы . . . . .	67
2.1.1. Простые вещественные собственные числа . . . . .	67
2.1.2. Простые мнимые собственные числа . . . . .	69
2.1.3. Общий случай. Вещественная форма Жордана . . . . .	71
2.2. Управляемое каноническое представление . . . . .	74
2.3. Наблюдаемое каноническое представление . . . . .	76
2.4. Задачи и упражнения . . . . .	77
<b>ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ</b>	<b>80</b>
3.1. Преобразование уравнений состояния к диагональной и блочно-диагональной формам . . . . .	81
3.1.1. Простые вещественные собственные числа . . . . .	81
3.1.2. Простые мнимые собственные числа . . . . .	82
3.2. Преобразование уравнений состояния к управляемой и наблюдаемой каноническим формам . . . . .	84
3.2.1. О возможности преобразования матрицы к форме Фробениуса . . . . .	84
3.2.2. Управляемое каноническое представление . . . . .	86
3.2.3. Наблюдаемое каноническое представление . . . . .	87
3.2.4. Примеры . . . . .	89
3.3. Задачи и упражнения . . . . .	96
<b>ГЛАВА 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ</b>	<b>98</b>
4.1. Управляемое каноническое представление . . . . .	99
4.2. Наблюдаемое каноническое представление . . . . .	100
4.3. Блочно-диагональная форма . . . . .	102
4.4. Жорданова форма . . . . .	103
4.5. Случай систем с несколькими входами и выходами . . . . .	105
4.6. Задачи и упражнения . . . . .	108

<b>ГЛАВА 5. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b>	<b>109</b>
5.1. Определения и основные свойства фазовых траекторий и фазовых портретов . . . . .	109
5.2. Поле фазовых скоростей. Классификация особых точек . . . . .	111
5.2.1. Вектор фазовой скорости . . . . .	111
5.2.2. Состояния равновесия системы . . . . .	112
5.2.3. Декомпозиция пространства состояний . . . . .	113
5.3. Виды фазовых портретов для систем второго порядка . . . . .	117
5.3.1. Фазовые портреты при диагональной (жордановой) форме матрицы $A$ . . . . .	121
5.3.2. Фазовые портреты при канонической форме фазовой переменной . . . . .	123
5.4. Задачи и упражнения . . . . .	126
<b>ГЛАВА 6. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ. ФОРМУЛА КОШИ</b>	<b>128</b>
6.1. Решение уравнений состояния. Формула Коши . . . . .	128
6.1.1. Решение однородного уравнения . . . . .	128
6.1.2. Решение неоднородного уравнения . . . . .	130
6.1.3. Свойства переходной матрицы . . . . .	131
6.2. Вычисление функции веса . . . . .	132
6.3. Определение начального состояния по начальному значению выхода и его производных . . . . .	133
6.4. Дискретные модели непрерывных систем . . . . .	134
6.4.1. Постановка задачи дискретизации . . . . .	135
6.4.2. Формулы перехода к разностным уравнениям . . . . .	137
6.5. Методы вычисления матричной экспоненты . . . . .	139
6.5.1. Точные методы . . . . .	139
6.5.2. Приближенные методы . . . . .	142
6.6. Вычисление матрицы $Q$ в общем случае . . . . .	145
6.7. Дискретные модели для различных видов входного процесса . . . . .	146
6.7.1. Смещенное $z$ -преобразование . . . . .	146
6.7.2. Прямоугольные импульсы . . . . .	148
6.7.3. Экспоненциальные импульсы . . . . .	149

6.7.4.	Треугольные импульсы . . . . .	149
6.8.	Подстановочные формулы для вычисления передаточной функции дискретной модели . . . . .	150
6.9.	Приведение уравнений многочастотных непрерывно-дискретных систем к одночастотным моделям . . . . .	153
6.9.1.	Метод аналитических преобразований . . . . .	154
6.9.2.	Метод моделирования . . . . .	156
6.10.	Устойчивость дискретных моделей. Связь с методами численного интегрирования . . . . .	159
6.10.1.	Условия устойчивости . . . . .	159
6.10.2.	Устойчивость методов численного интегрирования . . . . .	161
6.11.	Обратная задача – континуализация дискретных моделей . . . . .	164
6.12.	Задачи и упражнения . . . . .	165
<b>ГЛАВА 7. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b>		<b>166</b>
7.1.	Основные определения . . . . .	166
7.2.	Критерии управляемости . . . . .	169
7.3.	Критерии наблюдаемости. Теорема дуальности . . . . .	174
7.4.	Задачи и упражнения . . . . .	178
<b>ГЛАВА 8. ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА И ВОЗМУЩЕНИЙ</b>		<b>181</b>
8.1.	Постановка задачи оценивания состояния . . . . .	181
8.2.	Наблюдатели состояния . . . . .	183
8.3.	Наблюдатели пониженного порядка . . . . .	187
8.4.	Оценивание возмущений . . . . .	192
8.5.	Задачи и упражнения . . . . .	200
<b>ГЛАВА 9. СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ И ТЕРМИНАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ</b>		<b>202</b>
9.1.	Задача модального управления . . . . .	202
9.2.	Модальное управление по состоянию объекта . . . . .	202
9.3.	Модальное управление по выходу объекта. Теорема разделения . . . . .	204
9.4.	Терминальное управление . . . . .	208

9.5. Примеры систем модального и терминального управления . . . . .	211
9.5.1. Стабилизация углового движения ИСЗ с компенсацией возмущений . . . . .	211
9.5.2. Возбуждение колебаний в цепочке осцилляторов . . . . .	214
9.6. Задачи и упражнения . . . . .	218

## **ГЛАВА 10. УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ . . . . . 220**

10.1. Общие сведения о нелинейных системах . . . . .	220
10.2. Уравнения нелинейных звеньев и систем . . . . .	224
10.3. Особенности процессов в нелинейных системах . . . . .	230
10.3.1. Принцип суперпозиции . . . . .	231
10.3.2. Сепаратрисные поверхности . . . . .	232
10.3.3. Предельные циклы. Автоколебания . . . . .	233
10.3.4. Состояния равновесия. Отрезки покоя . . . . .	236
10.3.5. Неединственность решений. Пересечение траекторий . . . . .	237
10.3.6. Скользящие режимы . . . . .	239
10.3.7. Влияние внешних воздействий . . . . .	240

## **ГЛАВА 11. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ . . . . . 242**

11.1. Задачи и методы теории нелинейных систем . . . . .	242
11.2. Методы фазового пространства . . . . .	244
11.2.1. Метод фазовой плоскости . . . . .	245
11.2.2. Метод точечных отображений . . . . .	245
11.2.3. Условия существования предельных циклов для систем второго порядка . . . . .	246
11.3. Метод гармонической линеаризации (гармонического баланса) . . . . .	247
11.3.1. Основные положения. "Свойство фильтра" . . . . .	248
11.3.2. Коэффициенты гармонической линеаризации . . . . .	250
11.3.3. Уравнение гармонического баланса . . . . .	252
11.3.4. Пример. Исследование генератора колебаний . . . . .	256

11.4. <b>Метод функций Ляпунова</b> . . . . .	261
11.4.1. Основные определения . . . . .	261
11.4.2. Устойчивость множеств и частичная устойчивость . . . . .	264
11.4.3. Функции Ляпунова . . . . .	268
11.4.4. Устойчивость непрерывных систем . . . . .	270
11.4.5. Устойчивость дискретных систем . . . . .	276
11.4.6. Примеры . . . . .	279
11.5. <b>Методы теории абсолютной устойчивости</b> . . . . .	286
11.5.1. Задача абсолютной устойчивости . . . . .	286
11.5.2. Круговой критерий . . . . .	289
11.5.3. Критерий В.М. Попова . . . . .	290
11.6. <b>Исследование скользящих режимов. Метод эквивалентного управления</b> . . . . .	290
11.6.1. Понятие о скользящих режимах . . . . .	290
11.6.2. Определение движения в скользящем режиме . . . . .	293

## **ГЛАВА 12. НЕЛИНЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ** 298

12.1. <b>Системы с переменной структурой в задаче управления</b> . . . . .	298
12.2. <b>Системы с переменной структурой в задаче оценивания состояния</b> . . . . .	305
12.3. <b>Методы адаптивного управления</b> . . . . .	307
12.3.1. Задача адаптивного управления . . . . .	307
12.3.2. Структура адаптивных систем управления	308
12.3.3. Методика решения задач адаптивного управления . . . . .	310
12.4. <b>Адаптивные системы с явной эталонной моделью</b> . . . . .	314
12.4.1. Алгоритмы параметрической адаптации . . . . .	314
12.4.2. Алгоритмы сигнальной адаптации . . . . .	318
12.4.3. Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации . . . . .	319
12.5. <b>Адаптивные системы с неявной эталонной моделью</b> . . . . .	320
12.5.1. Алгоритмы параметрической адаптации . . . . .	321
12.5.2. Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации . . . . .	322

12.5.3. Пример. Адаптивное управление летательным аппаратом . . . . .	323
<b>12.6. Алгоритмы адаптивной идентификации . . . . .</b>	<b>330</b>
12.6.1. Задача параметрической идентификации . . . . .	330
12.6.2. Идентификации с явной настраиваемой моделью . . . . .	332
12.6.3. Идентификация на скользящих режимах . . . . .	333
12.6.4. Идентификация с неявной настраиваемой моделью . . . . .	334
12.6.5. Адаптивные наблюдатели . . . . .	336
<b>12.7. Адаптивное управление с идентификацией на скользящих режимах. Метод шунтирования . . . . .</b>	<b>339</b>
12.7.1. Постановка задачи . . . . .	340
12.7.2. Алгоритм настройки параметров . . . . .	343
12.7.3. Выбор закона управления . . . . .	345
12.7.4. Пример. Адаптивное управление летательным аппаратом . . . . .	346
<b>12.8. Задачи и упражнения . . . . .</b>	<b>352</b>

**ГЛАВА 13. УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ И ХАОТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ . . . . . 354**

<b>13.1. Задачи управления нелинейными колебаниями . . . . .</b>	<b>354</b>
<b>13.2. Управление энергией колебаний . . . . .</b>	<b>360</b>
13.2.1. Управление энергией консервативных систем. Частичная стабилизация . . . . .	360
13.2.2. Возбуждение колебаний нелинейного осциллятора: авторезонанс . . . . .	363
<b>13.3. Понятие о хаотических системах . . . . .</b>	<b>367</b>
13.3.1. Развитие понятия колебания . . . . .	367
13.3.2. Определение хаотической системы . . . . .	370
13.3.3. Критерии хаотичности . . . . .	373
13.3.4. Применения хаотических моделей . . . . .	376
<b>13.4. Адаптивное управление хаотическими системами на основе линеаризации отображения Пуанкаре и метода целевых неравенств . . . . .</b>	<b>378</b>
13.4.1. Постановка задачи и метод решения . . . . .	378

13.4.2. Адаптивное управление моделью брус- селятора . . . . .	382
13.4.3. Адаптивное управление моделью Рёсслера	386
<b>13.5. Управление синхронизацией систем на осно- ве адаптивных наблюдателей . . . . .</b>	<b>392</b>
13.5.1. Идея управляемой синхронизации . . . . .	393
13.5.2. Постановка задачи и схема решения . . . . .	395
13.5.3. Условия адаптивной синхронизации . . . . .	397
13.5.4. Передача сообщений с использованием систем Чуа . . . . .	399
<b>ГЛАВА А. Приложение А. МЕТОД СКОРОСТНО- ГО ГРАДИЕНТА</b>	<b>407</b>
<b>ГЛАВА В. Приложение В. МЕТОД КОНЕЧНО-СХОДЯ- ЩИХСЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ РЕКУРРЕНТ- НЫХ ЦЕЛЕВЫХ НЕРАВЕНСТВ</b>	<b>413</b>
<b>ГЛАВА С. Приложение С. ФУНКЦИИ И ПОДПРО- ГРАММЫ ПАКЕТА МАТЛАВ</b>	<b>420</b>
<b>ГЛАВА D. Приложение D. ВОЗМОЖНОСТИ СИ- СТЕМЫ SCILAB</b>	<b>437</b>
<b>ГЛАВА Е. ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>445</b>

## 0.1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремительное развитие вычислительной техники в конце XX столетия стимулировало автоматизацию многих областей практической деятельности. Это в свою очередь вызвало бурное развитие теории автоматического управления. Однако классические учебники 70 – 80х годов [15, 71, 76, 95] (как, впрочем, и более современные, изданные за рубежом) труднодоступны для сегодняшнего студента. Поэтому ощущается потребность в учебных пособиях, которые давали бы представление как о состоянии базовых разделов теории управления, так и о новых и новейших ее достижениях.

Данная книга представляет собой попытку заполнить этот пробел. При отборе материала авторы ориентировались на собственный опыт, на традиции, сложившиеся в Балтийском государственном техническом университете (бывшем Ленинградском механическом институте), а также на тенденции развития преподавания и научных исследований в данной области в ведущих университетах мира. Кроме того, авторы пытались представить себе: что будет важно для читателя в XXI веке, когда он откроет эту книгу.

Около двадцати лет назад в курсе систем автоматического управления обычно выделяли "классическую" и "современную" теорию. В первом случае подразумевались методы, основанные на аппарате передаточных функций, преобразования Лапласа, частотных характеристик и вытекающие из них инженерные методики синтеза, а во втором – методы, базирующиеся на описании систем уравнениями состояния, матричной алгебре, соответствующих численных методах и машинно-ориентированных процедурах синтеза. В настоящее время такие эпитеты представляются неправомерными по ряду причин. Прежде всего, широкое внедрение метода пространства состояний, начатое в работах Р.Калмана, Л.Заде и ряда других ученых, привело к практически повсеместному его использованию и в этом смысле метод также стал "классическим". Кроме того, практика ставит все новые задачи, и методы их решения обоснованно относятся к

”современным”. Заметим также, что в инженерную практику все глубже проникают методы, которые ранее казались уделом классической математики и механики. Поэтому следует говорить не об альтернативных, а о дополняющих друг друга подходах. В одних случаях более удобным является использование передаточных функций, в других – уравнений состояния, а во многих случаях применение обоих подходов равноценно.

Основная часть книги (главы 1 – 11) содержит достаточно полное введение в метод пространства состояний, в его основные понятия, идеи и результаты. Предполагается, что после знакомства с этой частью читатель сможет понимать язык научных статей и монографий, в которых данный метод широко используется. Для более полного изучения в соответствующих местах текста даны библиографические указания. Подробнее о содержании книги можно узнать из оглавления.

Содержание основной части книги соответствует учебным планам курсов теории автоматического управления при подготовке инженеров в области автоматизации и управления. Здесь тем не менее отсутствуют такие важные разделы, как исследование устойчивости линейных систем на основе алгебраических и частотных критериев, более того – понятие устойчивости считается знакомым читателю (хотя бы на интуитивном уровне), а определения устойчивости даны уже в связи с методом функций Ляпунова при рассмотрении нелинейных систем. Нет методов анализа точности систем регулирования и методов синтеза корректирующих звеньев на основе частотных характеристик. Недостаток места не позволил рассмотреть описание многосвязных динамических систем уравнениями вход-выход. По той же причине книга содержит сведения только о детерминированных системах.

Вообще говоря, книга посвящена не только системам автоматического управления, но и динамическим системам вообще, безотносительно к тому, имеется в них обратная связь или нет. Большое внимание уделяется способам преобразования моделей, а также методам теории оценивания и модального управления – эти важные разделы теории динамических систем недостаточно полно освещены в доступной учебной литературе. Анализ нелинейных систем содержит традиционные разделы, относящиеся к методам гармонической лине-

аризации и абсолютной устойчивости, и расширен в направлении исследования скользящих режимов.

Последняя часть (главы 12, 13) относится к "переднему краю" науки – методам нелинейного и адаптивного управления, интенсивно развивавшимся в 90-х годах. Этот материал изложен более фрагментарно, на его отбор влияли научные интересы авторов. Основное внимание уделяется методам адаптивного управления с неявной эталонной моделью и методу шунтирования, а также задачам и методам управления колебательными (в том числе – хаотическими) процессами. В настоящее время указанные вопросы слабо освещены не только в учебниках и монографиях, но и в журнальных статьях. В то же время актуальность перечисленных задач растет. Они представляют и теоретический интерес, поскольку связаны с исследованием частичной устойчивости и частичной стабилизации нелинейных систем – направлением, которое, по-видимому, будет играть важную роль в развитии теории автоматического управления в начале XXI века.

Для более глубокого изучения теории нелинейного и адаптивного управления можно рекомендовать книгу И.В. Мирошника, В.О. Никифорова, А.Л. Фрадкова "Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами" [64], выходящую одновременно в той же серии.

Книга снабжена задачами и упражнениями. При подборе упражнений авторы пользовались хорошо известными и прошедшими испытание временем книгами Ю.А. Андреева [3], Д. Луенбергера [174], Х. Квакуернаака и Р. Сивана [47], Д. Сю и А. Мейера [94].

Развитие вычислительной техники предопределило не только лицо теории управления, но и методы ее преподавания. В конце XX века невозможно изучать теорию, не пользуясь программными пакетами и средами. Наибольшее распространение в передовых высших учебных заведениях нашла удобная и универсальная система MATLAB<sup>R</sup>, разработанная и коммерчески распространяемая фирмой *The Math Works Com.*, США. Поэтому изложение в данной книге ориентировано на систематическое использование системы MATLAB для решения задач анализа и синтеза. Некоторые вспомогательные сведения о системе MATLAB помещены в Приложении С. Дополнительную информацию можно найти в книгах

[10, 32, 81, 82], а также на сайте фирмы *The MathWorks Com.* ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)).

Читателя наверняка заинтересует похожая на MATLAB, но в отличие от данной системы свободно распространяемая система Scilab<sup>R</sup>, разработанная во Франции в институте INRIA ([www-rocq.inria.fr/scilab](http://www-rocq.inria.fr/scilab)). Краткие сведения о системе Scilab<sup>R</sup> приведены в Приложении D.

Книга может использоваться в качестве учебного пособия преподавателями, студентами и аспирантами по специальностям, связанным с автоматизацией и управлением а также специалистами, интересующимися приложениями теории динамических систем.

Авторы сознают наличие недостатков в работе и с благодарностью примут любую критику, в том числе и самую конструктивную – написание другой книги подобного рода. Замеченные опечатки и дополнительный материал по теме книги будет помещаться в Интернет на странице лаборатории "Управление сложными системами" ИПМАШ РАН ([www.ipme.ru/ipme/labs/ccs/ccs.html](http://www.ipme.ru/ipme/labs/ccs/ccs.html)). Там можно найти и другие полезные сведения о публикациях, конференциях, программных продуктах, а также ссылки на другие источники информации по теории автоматического управления и смежным вопросам.

Издание книги было поддержано ФЦП "Интеграция", проект 360-01. Ряд результатов, помещенных в нее, был получен в процессе совместной работы авторов по грантам РФФИ (96-01-01151, 99-01-0672) и ФЦП "Интеграция" (проекты 2.1-589, A0145, A0151) в Институте проблем машиноведения РАН.

Авторы пользуются случаем поблагодарить всех, помогавших им в работе над книгой, а также выразить признательность рецензентам С.Д.Землякову и В.В.Малышеву за полезные и доброжелательные замечания.

Авторы посвящают книгу памяти безвременно ушедшего А.А.Первозванского – блестящего ученого и педагога, чей фундаментальный "Курс теории автоматического управления" [76] был и остается недосягаемым примером для подражания.

*Борис Андриевский, Александр Фрадков*

*Санкт-Петербург, декабрь 1999 г.*

# 1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

## 1.1. Динамические и статические системы. Понятие состояния динамических систем

Любая система, в том числе и система управления, состоит из совокупности подсистем (звеньев). Звенья могут различаться по характеру реакций на входное воздействие. С этой точки зрения все звенья могут быть разделены на *статические (безынерционные)* и *динамические (инерционные)*. Рассмотрим отличительные особенности в поведении и математическом описании систем одного и другого типов.

Статические системы<sup>1</sup> обладают мгновенной реакцией на входное воздействие. Более существенным свойством таких систем является то, что их реакция на входное воздействие не зависит от предыстории, от поведения системы в прошлом, а также от предыдущих значений входа.

Математически это можно описать следующим образом.

Обозначим через  $u(t)$ ,  $y(t)$  вход и выход системы в момент  $t$ . У статической системы для каждого  $t$  выход  $y(t)$  можно определить однозначно по значению  $u(t)$  в тот же момент времени. Для этой цели служит *статическая характеристика*  $y = f(u)$  или  $y = f(u, t)$  (для нестационарных систем). В соответствии с ней получаем  $y(t) = f(u(t))$ . Никакой другой дополнительной информации не требуется.<sup>2</sup>

Иначе обстоит дело с динамическими системами. Их особенностью является то, что для определения  $y(t)$  недостаточно информации об  $u(t)$  в тот же момент времени. Выходной сигнал зависит также от предыстории изменения входа и, кроме того, совокупности некоторых величин, называемых *начальным состоянием* системы. Рассмотрим понятие состояния более подробно.

Понятие состояния системы (звена) является одним из базовых понятий теории динамических систем, поэтому оно

---

<sup>1</sup> В дальнейшем термины *система*, *подсистема* и *звено* обычно будут использоваться как синонимы, так как их математические модели однотипны.

<sup>2</sup> Статической характеристикой в общем случае называют зависимость между входом и выходом системы в установившемся режиме (по истечении времени переходных процессов). Можно сказать, что у безынерционных систем (звеньев) этот режим наступает немедленно.

определяется не через другие понятия, а аксиоматически – перечислением совокупности присущих ему свойств [44, 46]. Рассмотрим некоторые из них.

Как отмечено выше, выход динамической системы определяется однозначно, если заданы предыстория изменения входного процесса на некотором промежутке и, кроме того, некоторая совокупность величин, относящаяся к началу данного промежутка – начальное состояние системы. Символически это будем записывать так: <sup>3</sup>

$$y(t_1) = \mathcal{S}(x(t_0); u_{[t_0, t_1]}).$$

Таким образом, состояние системы – это некоторый параметр, позволяющий сделать однозначным определение ее выхода по входу.

Различные начальные состояния приводят, вообще говоря, к различной реакции на одно и то же входное воздействие. В приведенном выше уравнении  $\mathcal{S}$  – некоторый оператор, преобразующий одну функцию в другую.

Состояние системы должно удовлетворять четырем *аксиомам (условиям) совместности* [44]. Рассмотрим две наиболее важные из них.

**Аксиома 1.** Выход  $y(t)$  для всех  $t \geq t_0$  определяется однозначно, если заданы  $x(t_0)$  и  $u_{[t_0, t_1]}$  (см. рис. 1.1, а).

Таким образом, состояние системы в данный момент времени содержит всю память о прошлом, существенную для развития процесса в будущем. Если фиксировать начальное состояние, то будущее от прошлого не зависит; все, что нужно знать от прошлого для определения процесса в будущем, содержится в состоянии на данный момент времени. Таким образом, для определения будущего поведения системы не имеет значения то, как она пришла в данное состояние, – по начальному состоянию и входу процесс определяется однозначно.

**Аксиома 2.** Если траекторию системы разбить на ряд участков, то можно рассматривать движение на каждом из них как новую траекторию при соответствующем начальном состоянии (см. рис. 1.1, б).

Пусть  $t_0 < t_1 < t_2$ . Тогда  $y(t_2) = \mathcal{S}(x(t_0); u_{[t_0, t_2]})$ . С другой стороны, при любых  $x(t_0)$ ,  $u_{[t_0, t_1]}$  можно определить состояние

---

<sup>3</sup> Через  $u_{[t_0, t_1]}$  обозначено *сужение* функции  $u(\cdot)$  на промежуток  $[t_0, t_1]$ .

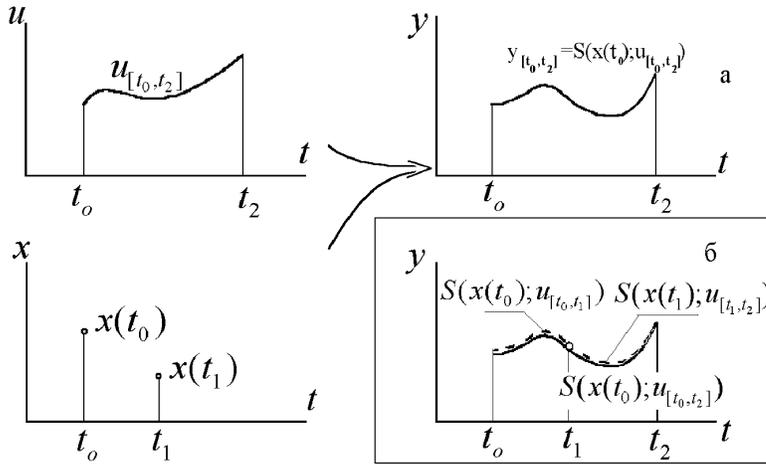


Рис. 1.1. Аксиомы совместности.

$x(t_1)$  таким образом, что  $y(t_2) = S(x(t_1); u_{[t_1, t_2]})$ .

Из этой аксиомы следует, что состояние динамической системы должно изменяться во времени соответствующим образом (в зависимости от входного процесса и начального состояния).

**Определение.** Множество  $\mathcal{X} \triangleq \{x\}$  возможных значений состояния системы называется *пространством состояний (данной системы)*.<sup>4</sup> □

Часто можно рассматривать в качестве пространства состояний  $n$ -мерное линейное вещественное пространство,  $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ . Тогда состояние  $x(t)$  есть  $n$ -мерный вещественный вектор – *вектор состояния*, или *фазовый вектор*. Компоненты этого вектора обычно будем обозначать через  $x_i(t)$ , т.е. писать

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Для краткости будем также использовать запись

$$x = \text{col}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \text{или} \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T.$$

<sup>4</sup> Используется также термин "фазовое пространство".

Такая запись в общем случае означает, что  $x$  есть вектор-столбец, составленный из расположенных в столбец компонент векторов  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Иногда, как будет видно из контекста, индекс используется для обозначения различных одноименных векторов.

Заметим, что такой вид пространства состояний не исчерпывает всех возможных ситуаций. Например, пространство состояний конечных автоматов состоит из конечного числа точек. С другой стороны, для многих систем нельзя указать конечное значение  $n$  размерности пространства  $\mathcal{X}$ . К таким системам относятся различные распределенные объекты, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, объекты с запаздыванием и так далее. В этой книге рассматриваются только *конечномерные динамические системы*. Однако и для конечномерных систем не обязательно  $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ . Например, для простейшей механической системы – маятника – одной из переменных состояния является угол поворота относительно точки подвеса. Но в множестве возможных значений угловой переменной точки  $0$  рад. и  $2\pi$  рад. совпадают. Следовательно, это множество не может быть линейным пространством, его геометрическим образом является не прямая, а окружность. Строгое рассмотрение таких систем требует привлечения понятия *многообразия* и выходит за рамки этой книги. Тем не менее многие свойства систем с угловыми координатами можно изучать, не используя аксиом линейного пространства. Поэтому, если не оговорено противное, мы будем считать, что  $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ .

Из определения понятия состояния следует, что если  $x$  – состояние системы,  $\mu(\cdot)$  – некоторое взаимно однозначное отображение пространства  $\mathcal{X}$  в себя ( $\mu: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ), то  $\tilde{x} \triangleq \mu(x)$  также можно рассматривать как состояние данной системы [44]. Таким образом, состояние определяется неединственным образом, а с точностью до взаимно однозначного преобразования (которых может быть сколь угодно много). В частности, если  $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ , а  $T$  – некоторая невырожденная матрица порядка  $n$  ( $\det T \neq 0$ ), то вектор  $\tilde{x} = Tx$  также может быть использован для описания состояния системы. Такой переход называется *преобразованием базиса в пространстве состояний*. Это преобразование не нарушает входо-выходных соотношений в описании системы.

Конкретизируем вид уравнений состояния. Рассмотрим так называемые *конечномерные дифференциальные (непрерывные) системы*. Уравнения состояния таких систем могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), & x(t_0) &= x_0, & t &\geq t_0, \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Первое из этих уравнений – (*собственно*) *уравнение состояния*, или *эволюционное уравнение*, описывает изменение состояния системы во времени  $t \in \mathcal{R}$  в зависимости от начальных условий в момент  $t_0$  и входного воздействия  $u(t)$ . Второе уравнение – *уравнение выхода*, устанавливает связь между текущими значениями состояния и входа, с одной стороны, и выхода  $y(t)$  – с другой. Фактически вся динамика системы сосредоточена в первом уравнении, а второе является статическим соотношением.

Переменные, входящие в уравнения (1.1), считаются векторными:  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^l$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  – вектор-функции от векторных аргументов соответствующих размерностей.

## 1.2. Уравнения состояния линейных систем

Если функции  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  линейны по  $x$ ,  $u$ , то уравнения состояния (1.1) могут быть записаны в виде [44]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) &= x_0, & t &\geq t_0, \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Такие системы называются *непрерывными линейными системами*.<sup>5</sup> Здесь, как и выше,  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^l$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ , а матрицы-функции  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  имеют размеры  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ ,  $l \times m$  соответственно.

**Определение 1.** Если  $D(t) \equiv \mathbf{0}$ , то система (1.2) называется *собственной* (*строго реализуемой*). В противном случае система называется *несобственной*.  $\square$

---

<sup>5</sup> Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому реакция системы на линейную комбинацию (*суперпозицию*) воздействий совпадает с той же линейной комбинацией реакций на каждое воздействие в отдельности. Общее определение линейных динамических систем приведено в п. 10.3.1. с. 231.

Уравнения состояния (1.2) реализуемых непрерывных систем иллюстрируются структурной схемой, приведенной на рис. 1.2.

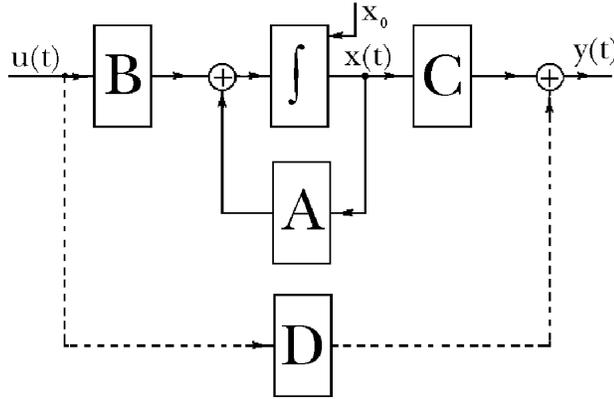


Рис. 1.2. Структурная схема системы (1.2).

**Определение 2.** Если матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  постоянны (не зависят от времени  $t$ ), то система (1.2) называется *стационарной*, в противном случае – *нестационарной*.  $\square$

Вид процессов в стационарных системах не зависит от того, какой момент времени рассматривается как начальный. Поэтому для них можно считать  $t_0 = 0$ .

Поскольку ниже основное внимание уделяется стационарным собственным системам, запишем соответствующие уравнения состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Аналогично могут быть записаны уравнения состояния реализуемых дискретных систем. Они имеют вид разностных уравнений

$$\begin{aligned} x[k+1] &= f(x[k], u[k], k), & x[k_0] &= x_0, & k &\geq k_0, \\ y[k] &= g(x[k], u[k], k) \end{aligned} \quad (1.4)$$

– для нелинейных систем и

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k], & x[t_0] &= x_0, & k &\geq k_0, \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k] \end{aligned} \quad (1.5)$$

– для линейных систем. В уравнениях (1.4), (1.5)  $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$  – ”дискретное время”,  $x[k] \in \mathcal{R}^n$ ,  $y[k] \in \mathcal{R}^l$ ,  $u[k] \in \mathcal{R}^m$ ,  $f(\cdot) \in \mathcal{R}^n$ ,  $g(\cdot) \in \mathcal{R}^l$ . Матрицы-функции  $A[k]$ ,  $B[k]$ ,  $C[k]$ ,  $D[k]$  имеют размеры  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ ,  $l \times m$ .

**З а м е ч а н и е.** Иногда уравнения состояния записывают более подробно, выделяя в них, кроме управления, внешние возмущения  $\varphi(t)$ , а также разделяя выходной сигнал на *управляемый*  $y_c(t)$  и *измеряемый*  $y_m(t)$  выходы. Тогда уравнения (1.3) принимают вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_\varphi \varphi(t), \quad y_c(t) = C_c x(t), \quad y_m(t) = C_m x(t).$$

В некоторых случаях подобная детализация оказывается удобной и будет использоваться ниже.

### 1.3. Линеаризация уравнений состояния

В реальных системах всегда присутствуют нелинейные зависимости, обусловленные, например, такими свойствами физических звеньев, как насыщение, люфт, нечувствительность, кулоново (”сухое”) трение и так далее. Эти эффекты приводят к нелинейности системы в целом. Методы исследования нелинейных систем будут рассмотрены в главе 11. с. 242. Исследование системы можно существенно упростить путем *линеаризации* ее модели, т.е. приближенной заменой уравнений вида (1.1) уравнениями (1.2) (или, для дискретных процессов, – использованием (1.5) вместо (1.4)).

Рассмотрим процесс линеаризации в общем виде. Пусть динамика системы описывается уравнениями состояния (1.1)

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad y(t) = g(x, u, t). \quad (1.6)$$

Введем некоторые произвольно изменяющиеся по времени (”опорные”) функции  $x^*(t) \in \mathcal{R}^n$  и  $u^*(t) \in \mathcal{R}^m$ . Найдем линейную часть разложения функций  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  в окрестности  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  в ряд Тейлора.<sup>6</sup> В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \Big|_* \Delta x(t) + \\ + \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \Big|_* \Delta u(t) + O^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

---

<sup>6</sup> Для осуществимости этой операции требуется дифференцируемость функций  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  по  $x, u$  в окрестности  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$ .

$$y(t) = g(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial x} \Big|_* \Delta x(t) + \\ + \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial u} \Big|_* \Delta u(t) + O^2,$$

где  $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x^*(t)$  – отклонение состояния исходной модели по отношению к вектору  $x^*(t)$ ;  $\Delta u(t) \triangleq u(t) - u^*(t)$  – отклонение входного процесса от  $u^*(t)$ ,  $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \Big|_*$ ,  $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \Big|_*$ ,  $\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} \Big|_*$ ,  $\frac{\partial g(\cdot)}{\partial u} \Big|_*$  – матрицы частных производных вектор-функций  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  (матрицы Якоби) по компонентам векторов  $x$ ,  $u$ , вычисленные при значениях  $x(t) \equiv x^*(t)$ ,  $u(t) \equiv u^*(t)$ ;  $O^2$  – малые величины второго порядка малости по  $\Delta x(t)$ ,  $\Delta u(t)$ .

Отсюда следует общий вид уравнений для приращений:

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) + f^*(t) - \dot{x}^*(t) + O^2,$$

$$\Delta y(t) = C(t)\Delta x(t) + D(t)\Delta u(t) + O^2,$$

где

$$A(t) \triangleq \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \Big|_*, \quad B(t) \triangleq \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \Big|_*, \\ C(t) \triangleq \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial x} \Big|_*, \quad D(t) \triangleq \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial u} \Big|_*$$

матрицы-функции размеров  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ ,  $l \times m$  (соответственно),  $f^*(t) \triangleq f(x^*(t), u^*(t), t)$ .

При достаточно малых отклонениях  $x(t)$ ,  $u(t)$  от опорных траекторий  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  малыми величинами более высокого порядка можно пренебречь.

Конкретный вид линеаризованной модели зависит от выбора опорного движения  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$ . Основным интерес представляют следующие частные случаи [23, 47, 72]:

– в качестве опорного выбирается некоторое невозмущенное движение, когда  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  удовлетворяют исходному уравнению (1.7).

В этом случае линеаризованная модель имеет вид

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t), \\ \Delta y(t) = C(t)\Delta x(t) + D(t)\Delta u(t) \quad (1.8)$$

– в качестве опорного движения выбираются неизменные во времени состояние системы и входной процесс, т.е. считается, что  $\dot{x}^*(t) \equiv 0$ ,  $\dot{u}^*(t) \equiv 0$ ,  $x^*(t) \equiv x^*$ ,  $u^*(t) \equiv u^*$ . Тогда

линеаризованная модель имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) + f^*(x^*, u^*, t), \\ \Delta y(t) &= C(t)\Delta x(t) + D(t)\Delta u(t).\end{aligned}\quad (1.9)$$

Заметим, что в приведенных выше соотношениях в качестве  $u(t)$ ,  $u^*(t)$  можно рассматривать не только внешние воздействия на систему, но и ее параметры. Тогда модель, полученная в результате линеаризации, позволяет приближенно судить о чувствительности решений системы к отклонению параметров от расчетных значений, причем эти отклонения представляются в виде аддитивных возмущений (так как они являются компонентами "расширенного" входного процесса  $\Delta u(t)$ ).

Пример. Линеаризация модели маятника

Для иллюстрации рассмотрим линеаризацию уравнений свободного движения математического маятника массой  $m$  и длиной  $l$ . Влиянием сил трения будем пренебрегать. Для вектора состояния  $x(t) \triangleq [\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]^T$ , где  $\varphi$  – угол поворота маятника, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -mglJ^{-1} \sin(x_1(t)). \end{cases}\quad (1.10)$$

Здесь  $J = ml^2$  – момент инерции маятника,  $g$  – ускорение свободного падения. Нулевому значению угла  $\varphi$  соответствует положение маятника "вертикально вниз". Маятник (1.10) имеет два состояния равновесия:  $x_0^1 = \mathbf{0}$  и  $x_0^2 = [\pi, 0]^T$ .<sup>7</sup> Линеаризация (1.10) в окрестности этих состояний приводит к уравнениям вида (1.3) с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm gl^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

где знак "минус" соответствует нижнему, а знак "плюс" – верхнему состояниям равновесия (т.е. точкам  $x_0^1$  и  $x_0^2$ .)

<sup>7</sup> Строго говоря, имеется множество состояний равновесия  $x_0 = [\pi n, 0]^T$ ,  $n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , поэтому для задач данного типа пространство состояний удобнее отождествлять не с плоскостью  $\mathcal{R}^2$ , а с поверхностью цилиндра.

Рассмотрим теперь в качестве опорной траектории процесс  $x^*(t)$ , у которого  $x_1^*(t) = \frac{\pi}{2} \cos(\beta t)$ ,  $x_2^*(t) = -\frac{\pi}{2} \beta \sin(\beta t)$ , где  $\beta = \sqrt{gl^{-1}}$ . Заметим, что такой процесс соответствует поведению модели, полученной линеаризацией относительно состояния  $x_0^1$  при  $x(0) = [\frac{\pi}{2}, 0]^T$ . Тогда функция

$$f^* = \left[ -\frac{\pi}{2} \beta \sin(\beta t), \quad -mglJ^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\beta t)\right) \right]^T.$$

В свою очередь  $\dot{x}^*(t) = [-\frac{\pi}{2} \beta \sin(\beta t), \quad -\frac{\pi}{2} \beta^2 \cos(\beta t)]^T$ , откуда получаем уравнения в отклонениях  $\Delta x(t) = x(t) - x^*(t)$ :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1(t) = \Delta x_2(t), \\ \Delta \dot{x}_2(t) = -mglJ^{-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\beta t)\right) \Delta x_1(t) - \\ \quad - mglJ^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\beta t)\right) + \frac{\pi}{2} \beta^2 \cos(\beta t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) представляют собой систему линейных неоднородных нестационарных уравнений и дают более точное приближение к колебательному процессу в исходной нелинейной системе (1.10), чем линеаризация в окрестности состояния  $x_0^1$ . Отметим, что (1.11) имеют вид (1.2) со входным процессом  $v(t) = -mglJ^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\beta t)\right) + \frac{\pi}{2} \beta^2 \cos(\beta t)$  и матрицами

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -mglJ^{-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\beta t)\right) & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Приведенная здесь процедура линеаризации может применяться (с очевидной заменой обозначений и аргументов) и для дискретных систем. Для линеаризации колебательных процессов также известен и широко используется так называемый *метод гармонического баланса* (*гармонической линеаризации*) [15, 76, 93, 94, 95, 113] (см. ниже п. 11.3. с. 247).

## 1.4. Примеры уравнений состояния систем

Рассмотрим несколько примеров моделей линейных систем в виде уравнений состояния.

### 1.4.1. Электротехнические устройства

**Пример 1. RC-цепь.** Рассмотрим систему, состоящую из последовательно соединенных емкостного элемента  $C$  и резистора с сопротивлением  $R$  (рис. 1.3, а). Входным процессом

считаем напряжение  $u(t)$  от внешнего источника, приложенное к зажимам цепи. Рассмотрим следующие два случая.

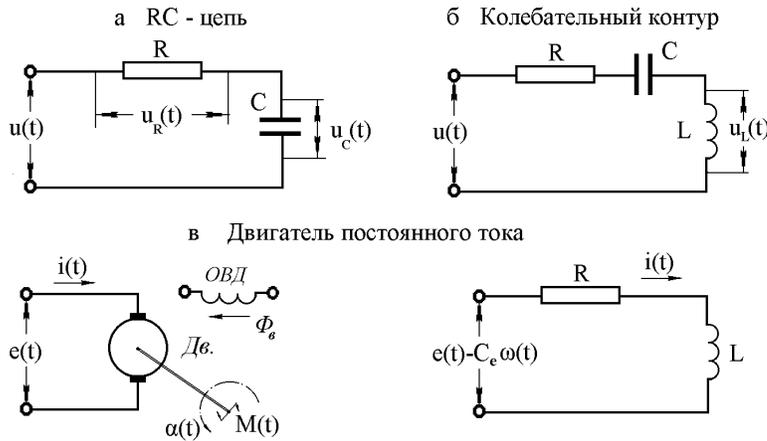


Рис. 1.3. Электротехнические устройства

1. Выход системы – напряжение  $u_C(t)$  на зажимах емкостного элемента.

RC-цепь описывается уравнением

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t). \quad (1.12)$$

Введем  $T \triangleq RC$  – *постоянную времени* цепи и примем  $x(t) \triangleq u_C(t)$ . Выразив из (1.12) значение  $\dot{x}(t)$ , получим уравнение состояния вида (1.3), в котором  $n = 1$ ,  $A = -T^{-1}$ ,  $B = T^{-1}$ ,  $C = 1$ . Матрицы порядка  $1 \times 1$  обычно отождествляются со скалярными элементами, поэтому при их записи квадратные скобки опускаются. Найденные уравнения соответствуют собственной системе.

2. Выход системы – напряжение  $u_R(t)$  на зажимах резистора.

Уравнение состояния (для  $x(t)$ ) имеет тот же вид. Изменяется уравнение выхода, так как теперь  $y(t) \triangleq u_R(t) \equiv u(t) - u_C(t) \equiv u(t) - x(t)$ . Поэтому данная система не относится к строго реализуемым и имеет матрицы  $A = -T^{-1}$ ,  $B = T^{-1}$ ,  $C = -1$ ,  $D = 1$ .

**Пример 2. Колебательный контур (RLC-цепь).** Запишем теперь уравнения состояния колебательного контура, включающего последовательно соединенные R, L, C-элементы (рис. 1.3, б). Выходным сигналом  $y(t)$  будем считать напряжение на зажимах индуктивного элемента  $u_L(t)$ , а входом, как и в предыдущем случае, – падение напряжения на всей цепи  $u(t)$ .

Как известно из электротехники, выполнены соотношения

$$L \frac{di(t)}{dt} = u_L(t), \quad C \frac{du_C(t)}{dt} = i(t),$$

$u_R(t) = Ri(t)$ ,  $u(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$ , где  $i(t)$  – сила тока в цепи,  $u_C(t)$  – напряжение на зажимах емкостного элемента,  $u_R(t)$  – падение напряжения на активном сопротивлении. Определив вектор состояния  $x(t) \triangleq [i(t), u_C(t)]^T$  и выход  $y(t) \triangleq u_L(t)$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (u(t) - Rx_1(t) - x_2(t))L^{-1}, \\ \dot{x}_2(t) = C^{-1}x_1(t), \\ y(t) = u(t) - Rx_1(t) - x_2(t). \end{cases} \quad (1.13)$$

Следовательно, в рассматриваемом примере  $n = 2$ ,  $m = l = 1$  и уравнения состояния (1.2) содержат матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -RL^{-1} & -L^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} L^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [-R, -1], \quad D = 1.$$

**Пример 3. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением.** Рассмотрим линеаризованные уравнения электрического двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 1.3, в). Пусть обмотка возбуждения двигателя создает постоянный магнитный поток, управление осуществляется изменением электродвижущей силы источника в якорной цепи  $e(t)$ . Внутренним сопротивлением источника пренебрегаем. Входными воздействиями считаем  $e(t)$  и приведенный момент нагрузки на валу двигателя  $M(t)$ . Выходами системы считаем угол поворота ротора  $\alpha(t)$  и ток в якорной обмотке  $i(t)$ . Динамику системы можно описать следующими уравнениями [15, 76]:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t), \\ L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t) - C_e \omega(t), \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_M i(t) - M(t). \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь обозначены:  $L, R$  – индуктивность и активное сопротивление якорной цепи,  $J$  – приведенный момент инерции ротора,  $C_e, C_M$  – постоянные, зависящие от конструктивных параметров двигателя и величины потока возбуждения.

В данном примере  $n = 3, m = l = 2$ . Введем вектор состояния так, чтобы его компоненты соответствовали значениям  $\alpha(t), i(t), \omega(t) : x(t) \triangleq [\alpha(t), i(t), \omega(t)]^T \in \mathcal{R}^3$ . Аналогично определим вектор входа  $u(t) \triangleq [e(t), M(t)]^T \in \mathcal{R}^2$  и вектор выхода  $y(t) \triangleq [\alpha(t), i(t)]^T \in \mathcal{R}^2$ . Как легко убедиться, уравнения (1.14) принимают вид (1.3), в которых

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -RL^{-1} & -C_e L^{-1} \\ 0 & C_M J^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L^{-1} & 0 \\ 0 & -J^{-1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 1.4.2. Летательные аппараты

**Пример 1. Угловое движение искусственного спутника Земли.** Рассмотрим упрощенную модель углового движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) относительно продольной оси [19], рис. 1.4.

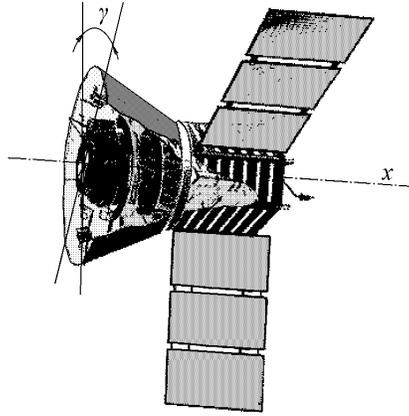


Рис. 1.4. Искусственный спутник Земли.

Обозначим через  $\gamma(t)$ ,  $\omega_x(t)$  – угол и угловую скорость крена ИСЗ;  $J_x$  – момент инерции ИСЗ относительно продольной оси  $x$ ;  $M_x(t)$  – управляющий момент относительно этой оси, развиваемый, например, реактивными двигателями. Запишем уравнение динамики вращательного движения и кинематическое соотношение, связывающее угол и угловую скорость. Получим

$$\begin{cases} \frac{d\gamma(t)}{dt} = \omega_x(t), \\ \frac{d\omega_x(t)}{dt} = \frac{M_x(t)}{J_x}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Для данной системы  $n = 2$ ,  $m = 1$ . Естественным образом можно определить вектор состояния, сопоставив его компонентам значения угла и угловой скорости:  $x(t) \triangleq [\gamma(t), \omega_x(t)]^T$ . Снова получаем уравнения вида (1.3), в которых матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ J_x^{-1} \end{bmatrix}.$$

Вид матрицы  $C$  определяется тем, какие переменные измеряются или относительно каких из них формулируется цель управления. Например, если измеряется только угол крена, то  $l = 1$  и  $C = [1, 0]$ . Если измеряются обе переменные, то  $l = 2$ ,  $C = \mathbf{I}_2$ .<sup>8</sup>

**Пример 2. Продольное движение летательного аппарата в атмосфере.** Как известно, уравнения продольного движения летательного аппарата (ЛА) в атмосфере (рис. 1.5) могут быть записаны в виде [19, 23, 98]

$$\begin{cases} m\dot{V}(t) = -mg \sin \theta + P \cos \alpha - qS (c_x \cos \alpha + c_y \sin \alpha), \\ mV\dot{\theta}(t) = -mg \cos \theta + P \sin \alpha + qS (-c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha), \\ J_z \dot{\omega}_z = qS b m_z, \\ \dot{\vartheta}(t) = \omega_z, \\ \dot{x}(t) = V \cos \theta \cos \Psi, \\ \dot{H}(t) = V \sin \theta, \end{cases} \quad (1.16)$$

где  $\vartheta$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  – углы тангажа, наклона и поворота траектории;  $\alpha = \vartheta - \theta$  – угол атаки;  $V$  – земная скорость ЛА;  $mg$  – сила тяжести;  $S, b$  – характерная площадь и линейный размер

<sup>8</sup> Здесь и далее через  $\mathbf{I}_n$  обозначена единичная матрица порядка  $n$ . Иногда индекс  $n$  в записи будет опускаться.

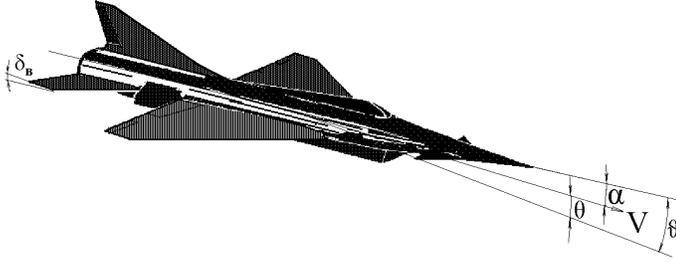


Рис. 1.5. Самолет и его продольные угловые координаты.

ЛА;  $J_z$  – момент инерции ЛА относительно боковой оси;  $q$  – скоростной напор;  $x, H$  – земные координаты центра масс ЛА;  $P$  – сила тяги двигателя;  $c_x, c_y, m_z$  – коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и момента тангажа. Значения этих коэффициентов сложным образом зависят от скорости ЛА, углов атаки и отклонения рулевых органов, а также от высоты и скорости полета.

В результате линеаризации, уравнения (1.16) в отклонениях от заданной "опорной" траектории приводятся к уравнениям состояния (1.3) с матрицами [23]

$$A = \begin{bmatrix} -a_x^V & -a_x^\theta + a_x^\alpha & 0 & -a_x^\alpha & 0 & -a_x^H \\ -a_y^V & -a_y^\theta + a_y^\alpha & 0 & -a_y^\alpha & 0 & -a_y^H \\ -a_{m_z}^V & a_{m_z}^\alpha & -a_{m_z}^{\omega_z} & -a_{m_z}^\alpha & 0 & -a_{m_z}^H \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta^* \cos \Psi^* & -V \sin \theta^* \cos \Psi^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta^* & V \cos \theta^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_x^{\delta_d} & -a_x^{\delta_b} \\ a_y^{\delta_d} & a_y^{\delta_b} \\ a_{m_z}^{\delta_d} & -a_{m_z}^{\delta_b} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где  $\theta^*, \Psi^*$  – опорные значения углов  $\theta, \Psi$ . В качестве вектора состояния взят вектор отклонений координат движения системы от опорных:  $x \triangleq [\Delta V, \Delta \theta, \Delta \omega_z, \Delta \vartheta, \Delta x, \Delta H]^T$ . Вектор управления  $u \triangleq [\Delta \delta_d, \Delta \delta_b]^T$ , где  $\delta_d, \delta_b$  – сигналы управления

двигателем и рулем высоты.<sup>9</sup>

Вид матриц  $C$  и  $D$  зависит от того, какие переменные измеряются датчиками или используются при записи цели управления.

### 1.4.3. Механические конструкции

**Пример 1. Движение перевернутого маятника на тележке.** Рассмотрим перевернутый ("обращенный") маятник (рис. 1.6), ось которого смонтирована на тележке, которая может перемещаться в горизонтальном направлении. На тележку вдоль направления перемещения действует внешняя сила  $F(t)$ . Обозначим:  $m$  и  $M$  – массы маятника и тележки;  $L$  – расстояние между осью вращения маятника и его центром тяжести;  $J$  – момент инерции маятника относительно оси вращения;  $k$  – коэффициент "вязкого" трения;  $g$  – ускорение свободного падения. За нулевую точку отсчета угла отклонения маятника  $\varphi(t)$  примем направление "вертикально вверх". Через  $s(t)$  обозначим перемещение тележки относительно выбранного начального (нулевого) положения.

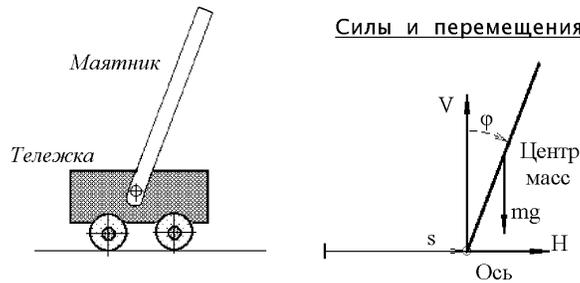


Рис. 1.6. Перевернутый маятник.

Исходная математическая модель системы строится одним из методов теоретической механики, см. [62], например, в виде уравнений Лагранжа второго рода. Как показано, например, в [47], упрощенная линеаризованная модель данной системы относительно вектора состояния  $x(t) \triangleq$

<sup>9</sup> Для краткости записи линеаризованных уравнений символ  $\Delta$  обычно опускается.

$[s, \dot{s}, s+L'\varphi, \dot{s}+L'\dot{\varphi}]^T$  и входа  $u(t) = F(t)$  может быть записана в виде уравнений (1.3) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -kM^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -gL_1^{-1} & 0 & gL_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

где через  $L_1 \triangleq \frac{J+mL^2}{mL}$  обозначена *эффективная длина* маятника.

Как и выше, вид матриц  $C$ ,  $D$  определяется условиями измерения.

**Пример 2. Движение транспортного средства по неровной поверхности.** Рассмотрим движение двухмассовой системы, состоящей из связанных рессорами корпуса массой  $m_1$  и колеса массой  $m_2$ , перемещающейся по неровной поверхности [126] (рис. 1.7). Считаем, что система работает

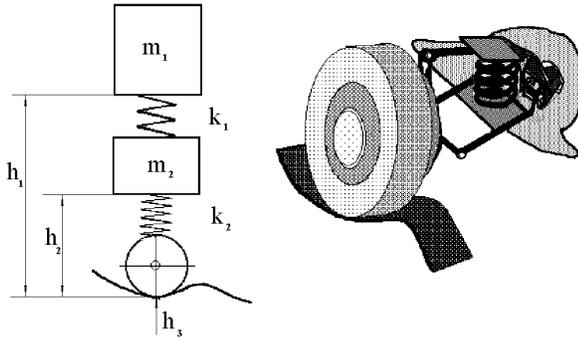


Рис. 1.7. Транспортная система.

в области линейных упругих деформаций и коэффициенты жесткости рессоры и колеса равны  $k_1, k_2$ . Обозначив через  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$  соответственно вертикальное перемещение корпуса, колеса и высоту поверхности (относительно некоторого уровня), для вектора  $x(t) \triangleq [h_1(t), \dot{h}_1(t), h_2(t), \dot{h}_2(t)]^T$  и входного воздействия  $u(t) \triangleq h_3(t)$  получим уравнения состоя-

ния вида (1.3) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 m_1^{-1} & 0 & k_2 m_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 m_2^{-1} & 0 & -(k_1 + k_2) m_2^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 m_2^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Если выходами считать положение корпуса  $y_1(t) \triangleq h_1(t)$  и расстояние между осью крепления колеса и поверхностью  $y_1(t) \triangleq h_2(t) - h_3(t)$ , то получим матрицы

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Пример 3. Динамика трехстепенного гироскопа.** Рассмотрим трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе, подверженный влиянию внешних моментов относительно кардановых осей. Обозначим:  $\alpha(t), \beta(t)$  – углы поворота оси ротора гироскопа;  $H$  – его кинетический момент;  $J_B, J_C$  – моменты инерции;  $M_B(t), M_C(t)$  – внешние моменты. Тогда линеаризованные уравнения движения оси гироскопа (в отклонениях относительно некоторого опорного угла  $\beta_0$ ) имеют вид [91]

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \omega_C(t), \\ J_C \dot{\omega}_C(t) = -\mu_C \omega_C(t) + H \cos \beta_0 \omega_B(t) + M_C(t), \\ \dot{\beta}(t) = \omega_B(t), \\ J_B \dot{\omega}_B(t) = -H \cos \beta_0 \omega_C(t) - \mu_B \omega_B(t) + M_B(t), \end{cases} \quad (1.20)$$

где параметры  $\mu_C, \mu_B$  характеризуют влияние сил вязкого трения;  $\omega_B(t), \omega_C(t)$  – угловые скорости изменения направления оси гироскопа. Введем вектор состояния  $x(t) \triangleq [\alpha(t), \omega_C(t), \beta(t), \omega_B(t)]^T$  и вектор входа  $u(t) \triangleq [M_B(t), M_C(t)]$ . Тогда уравнения состояния гироскопа могут быть записаны в виде (1.3), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_C J_C^{-1} & 0 & H \cos \beta_0 J_C^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -H \cos \beta_0 J_B^{-1} & 0 & -\mu_B J_B^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & J_B^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Как видно из приведенных примеров, несмотря на то что вектор состояния принадлежит некоторому абстрактному пространству  $\mathcal{X}$ , его компоненты могут отождествляться с числовыми значениями конкретных физических переменных, представленных в выбранной системе единиц.

#### 1.4.4. Цифровые устройства

Рассмотрим теперь примеры разностных уравнений состояния (1.5). Как отмечено выше, такие уравнения используются при описании динамики систем дискретного времени, к которым относятся и цифровые системы обработки информации и управления.

**Пример 1. Дискретное интегрирование.** Процесс вычисления интеграла от функции непрерывного времени в дискретных системах аналогичен суммированию входной последовательности. Это можно представить рекуррентной формулой  $x[k+1] = x[k] + u[k]$ , где  $u[k]$  – значения входного процесса,  $x[k]$  – вычисленное значение суммы ( $x[k] = \sum_{i=0}^{k-1} u[i]$ ). Принимая за состояние и выход системы значения  $x[k]$ , получим уравнения состояния в форме (1.5), где  $A = 1, B = 1, C = 1, D = 0$ .

Заметим, что если вычислительное устройство достаточно производительное, при вычислении  $y[k]$  может учитываться в  $y[k]$  значение  $u[k]$  в тот же момент времени ( $y[k] = \sum_{i=0}^k u[i]$ ). Тогда в (1.5)  $D = 1$ .

**Пример 2. Цифровая фильтрация.** Рассмотрим цифровой нерекурсивный фильтр нижних частот, реализующий процесс вычисления *скользящего среднего*, например, за четыре такта работы:  $y[k] = \frac{1}{4} \sum_{i=k-4}^{k-1} u[i]$ . Этот алгоритм можно представить с помощью группы элементов памяти (или "задержки"), первый из которых воспринимает значение входного процесса. На каждом следующем шаге выполняется "сдвиг" содержимого элементов памяти от первого элемента к последующим. Таким образом, приходим к разностным уравнениям:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = u[k], \\ x_2[k+1] = x_1[k], \\ x_3[k+1] = x_2[k], \\ x_4[k+1] = x_3[k], \\ y[k] = \frac{1}{4} (x_1[k] + x_2[k] + x_3[k] + x_4[k]), \end{cases} \quad (1.22)$$

в результате чего получаем уравнения состояния (1.5) с ма-

трицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{4}[1, 1, 1, 1].$$

Рассмотренный пример показывает, что уравнения состояния часто приводят к *разреженным матрицам*, которые содержат относительно большое число нулевых элементов. Поэтому для использования метода пространства состояний целесообразно прибегать к алгоритмам вычислений, ориентированным на действия с такими матрицами [77], а также использовать специальные (*канонические*) формы записи уравнений состояния. Некоторые из таких форм рассматриваются в главе 2. с. 67.

## 1.5. Передаточные функции и их определение по уравнениям состояния

### 1.5.1. Передаточные функции линейных систем

Рассмотрим линейную стационарную систему непрерывного времени

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.23)$$

либо дискретную линейную стационарную систему

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \quad y[k] = Cx[k] + Du[k], \quad (1.24)$$

где  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $y \in \mathcal{R}^l$ ,  $u \in \mathcal{R}^m$ .

**Определение [3, 47, 66].** Выражение

$$\mathbf{W}(\lambda) \triangleq C(\lambda \mathbf{I}_n - A)^{-1}B + D, \quad \lambda \in \mathcal{C}, \quad (1.25)$$

называется *передаточной функцией* системы (1.23) (или (1.24)) от входа  $u$  к выходу  $y$ .  $\square$

Заметим, что  $\mathbf{W}(\lambda)$  является матричной функцией размера  $l \times m$  от комплексного аргумента. В литературе по теории регулирования обычно принято для непрерывных систем аргумент передаточной функции обозначать через  $s$  или  $p$ , а для дискретных систем – через  $z$  [15, 47, 66, 76, 95, 93].

Передаточные функции часто используются в различных задачах исследования динамических (в первую очередь – линейных и стационарных) систем. Применение этих функций для получения частотных характеристик будет показано в следующем параграфе. Чтобы сделать данное определение менее формальным и показать, как можно ввести передаточные функции в других ситуациях, используем для вывода выражения (1.25) *преобразование Лапласа*<sup>10</sup> [15, 66, 76, 93, 94, 95]. Для этого при нулевых начальных условиях  $x_0 = 0$  перейдем к изображениям по Лапласу [66]:  $X(s) \triangleq \mathcal{L}\{x(t)\}$ ,  $Y(s) \triangleq \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(s) \triangleq \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Тогда при  $\det(s\mathbf{I}_n - A) \neq 0$  получаем  $X(s) = (s\mathbf{I}_n - A)^{-1}BU(s)$  и  $Y(s) = (C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B + D)U(s)$ .

Таким образом, мы нашли матричный множитель, связывающий изображения по Лапласу входного и выходного процессов при нулевом начальном состоянии – передаточную функцию данной системы (1.25).

Для дискретных систем (1.24) аналогичный результат получается с помощью *z-преобразования* [76, 66].

Для строго реализуемых систем передаточная функция имеет более простой вид  $\mathbf{W}(\lambda) = C(\lambda\mathbf{I}_n - A)^{-1}B$ , который обычно и будем использовать в дальнейшем.

Размер матрицы  $\mathbf{W}(\lambda)$  определяется размерностями входа и выхода системы. Для систем с одним входом и одним выходом,  $y(t) \in \mathcal{R}$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}$ ,  $l = m = 1$  и  $\mathbf{W}(\lambda)$  становится отношением многочленов от  $\lambda$ :  $W(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}$ . В общем случае получается матрица, элементами которой являются передаточные функции  $W_{i,j}(\lambda) = \frac{B_{i,j}(\lambda)}{A_{i,j}(\lambda)}$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $j = 1, \dots, m$ , от каждого входа  $u_i$  к каждому выходу  $y_j$ :

$$\begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ \vdots \\ Y_l(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1,1}(\lambda) & \dots & W_{1,m}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{l,1}(\lambda) & \dots & W_{l,m}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(\lambda) \\ \vdots \\ U_m(\lambda) \end{bmatrix}.$$

---

<sup>10</sup> *Изображением по Лапласу*  $X(s)$  вектор-функции  $x(t)$  называется функция комплексной переменной  $s$ , заданная как  $\mathcal{L}\{x(t)\} \triangleq \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$ .

### 1.5.2. Алгоритмы вычисления передаточных функций

Остановимся на вычислительной стороне получения  $\mathbf{W}(\lambda)$ . Наибольшую сложность представляет вычисление *резольвенты*  $\mathbf{R}(\lambda) \triangleq (\lambda \mathbf{I}_n - A)^{-1}$  матрицы  $A$ . По правилу обращения матриц выполнено

$$\mathbf{R}(\lambda) = \frac{\text{adj}(\lambda \mathbf{I}_n - A)}{\det(\lambda \mathbf{I}_n - A)},$$

где через  $\text{adj}(\cdot)$  обозначена матрица алгебраических дополнений к  $(\lambda \mathbf{I}_n - A)^T$ , или *присоединенная* (к  $\lambda \mathbf{I}_n - A$ ) *матрица* [53]. Знаменатель этого выражения есть скалярный многочлен степени  $n$ ,  $\det(\lambda \mathbf{I}_n - A) \triangleq \Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$ . Он называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Таким образом, все передаточные функции  $W_{i,j}(\lambda)$ , вычисленные по формуле (1.25), имеют (с точностью до возможных сокращений) одинаковые знаменатели  $A_{i,j}(\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$ . Поэтому характеристический многочлен матрицы  $A$  совпадает со знаменателем передаточной функции системы. Вид переходного процесса в системе, ее устойчивость определяются корнями  $\lambda_i$  данного многочлена. Значения  $\lambda_i$  называются *собственными числами* матрицы  $A$ . Множество собственных чисел  $\{\lambda_i\}$  известно как *спектр* данной матрицы [53]. Поэтому условие асимптотической устойчивости системы (1.23) можно сформулировать, как требование того, чтобы спектр матрицы  $A$  целиком располагался в левой полуплоскости комплексной плоскости  $\mathcal{C}$ . Для асимптотической устойчивости дискретных систем (1.24) спектр матрицы  $A$  должен лежать внутри окружности единичного радиуса плоскости  $\mathcal{C}$  с центром в начале координат.

Вычисление резольвенты  $\mathbf{R}(\lambda)$  осложняется тем, что *характеристическая матрица*  $\lambda \mathbf{I}_n - A$  не числовая, а функциональная – зависит от переменной  $\lambda$ . Поэтому стандартные алгоритмы обращения матриц (например, алгоритм Гаусса) здесь не применимы. Для решения этой задачи разработан ряд специальных алгоритмов: *Леверье–Фаддеева*, *Данилевского*, *Сурье* [47, 94], дающие хороший результат при невысоком порядке системы. Для матриц высокой размерности при вычислении по этим алгоритмам происходит быстрое накопление ошибок округления, связанных с ограниченностью раз-

рядной сетки ЭВМ. Для устранения этого явления разработаны более устойчивые вычислительные алгоритмы, основанные на приведении матриц с помощью элементарных преобразований к так называемой канонической форме Хессенберга [1, 100].<sup>11</sup>

При "ручном" вычислении передаточной функции оказывается более удобной запись уравнений состояния в операторной форме [66] с последующим определением выходной переменной через решение систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим этот метод более подробно.

Перепишем выражение для передаточной функции в виде  $\mathbf{W}(\lambda) = C\mathbf{W}_x(\lambda) + D$ , где  $\mathbf{W}_x(\lambda) = (\lambda\mathbf{I}_n - A)^{-1}B$ . (Заметим, что  $\mathbf{W}_x(\lambda)$  есть  $n \times m$ -матричная передаточная функция к вектору состояния системы). Представим  $\mathbf{W}_x(\lambda)$  и  $B$  в виде  $\mathbf{W}_x(\lambda) = [\mathbf{w}_1(\lambda), \mathbf{w}_2(\lambda), \dots, \mathbf{w}_m(\lambda)]$ ,  $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]$ , где  $\mathbf{w}_j(\lambda)$ ,  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  – столбцы указанных матриц  $\mathbf{W}_x(\lambda)$  и  $B$ . Для  $\mathbf{w}_j(\lambda)$ , очевидно, получаем уравнения

$$(\lambda\mathbf{I}_n - A)\mathbf{w}_j(\lambda) = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.26)$$

каждое из которых является системой  $n$  линейных уравнений относительно  $n$  неизвестных компонент вектор-функций  $\mathbf{w}_j(\lambda) = [w_{1j}(\lambda), w_{2j}(\lambda), \dots, w_{nj}(\lambda)]^T$ . Находя решения (1.26) по формулам Крамера [3, 53, 66], получим

$$w_{ij}(\lambda) = \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.27)$$

где  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I}_n - A)$  есть главный определитель системы (1.27), совпадающий с характеристическим многочленом матрицы  $A$ , а  $\Delta_{ij}(\lambda)$  есть определители, полученные заменой  $i$ -го столбца характеристической матрицы  $\lambda\mathbf{I}_n - A$  на столбец  $\mathbf{b}_j$ . Найдя все определители, получим матричную передаточную функцию  $\mathbf{W}_x(\lambda)$  к состоянию системы. После умножения на матрицу  $C$  и суммирования полученного выражения с матрицей  $D$  находим искомую передаточную функцию.

Данный прием вычислений удобен и для уравнений более общего вида, например

$$A_0\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t), \quad (1.28)$$

---

<sup>11</sup> Матрица  $A$  порядка  $n$  имеет *верхнюю каноническую форму Хессенберга*, если ее элементы  $a_{ij}$  удовлетворяют условию  $a_{ij} = 0$  для  $i - j \geq 2$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

где  $A_0$  —  $n \times n$ -матрица,  $\det A_0 \neq 0$ . При переходе к стандартному виду (1.23) получаем  $A = A_0^{-1}A_1$ ,  $B = A_0^{-1}B_1$ . При вычислении передаточной функции можно этого не делать, а сразу решать уравнения

$$(\lambda A_0 - A_1)\mathbf{w}_j(\lambda) = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.29)$$

Главный определитель системы (1.29)  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda A_0 - A_1)$  будет (с точностью до постоянного множителя) совпадать с характеристическим многочленом матрицы  $A$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

### 1.5.3. Примеры перехода к передаточным функциям от уравнений состояния

**Пример 1. Электрические цепи.** Вернемся к рассмотренным в п. 1.4.1. с. 25, уравнениям RLC-цепей. Непосредственным вычислением получаем, что уравнениям (1.12) при  $y(t) = x(t)$  (выход — напряжение на емкости) соответствует передаточная функция  $W(s) = \left(s + \frac{1}{T}\right)^{-1} \frac{1}{T} = \frac{1}{Ts + 1}$ . Данная цепь является аperiодическим звеном первого порядка [15, 76] (или фильтром нижних частот). Когда выходом системы является напряжение  $u_R(t)$  на зажимах резистора, получаем  $W(s) = \frac{Ts}{Ts + 1}$  — дифференцирующее звено с замедлением.

Для колебательного контура (1.13), с. 26, система (1.26) имеет вид

$$\begin{cases} (s + RL^{-1})w_1(s) + L^{-1}w_2(s) = L^{-1}, \\ -C^{-1}w_1(s) + sw_2(s) = 0, \end{cases}$$

откуда 
$$\begin{cases} (Ls + R)w_1(s) + w_2(s) = 1, \\ -w_1(s) + sCw_2(s) = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

где  $s \in \mathcal{C}$ ,  $w_1(s), w_2(s)$  — передаточные функции к переменным  $x_1, x_2$ . Из (1.30) находим  $\Delta(s) = LCs^2 + RCs + 1$ ,  $\Delta_1(s) = Cs$ ,  $\Delta_2(s) = 1$ , поэтому

$$w_1(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}, \quad w_2(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

Учитывая уравнение выхода в (1.13), получаем передаточную функцию

$$W(s) = -Rw_1(s) - w_2(s) + 1 = \frac{-RCs - RL - 1 + LCs^2 + RCs + 1}{LCs^2 + RCs + 1} =$$

$= \frac{Ks^2}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$ , где  $T = \sqrt{LC}$ ,  $K = LC = T^2$ ,  $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ . Данная передаточная функция соответствует комбинации двойного дифференцирующего звена и колебательного (при  $\xi < 1$ ) или аperiodического второго порядка [15, 76] (при  $\xi \geq 1$ ) звеньев. В качестве частотно-избирательного фильтра оно является фильтром верхних частот (ВЧ-фильтром).

Отметим, что в рассмотренных случаях размерность пространства состояний системы совпадает со степенью знаменателя передаточной функции. Кроме того, у строго реализуемых систем степень числителя передаточной функции ниже степени знаменателя. При  $D \neq 0$  они совпадают. Данная зависимость имеет общий характер и будет наблюдаться в дальнейшем.

В последующих примерах для вычисления передаточных функций будем использовать соотношения (1.28), (1.29).

**Пример 2. Двигатель постоянного тока.** Рассмотрим модель двигателя постоянного тока (1.14), с.26. Уравнения (1.29) принимают вид

$$\begin{cases} s w_{\alpha,e}(s) - w_{\omega,e}(s) = 0, \\ (Ls + R)w_{i,e}(s) + C_e w_{\omega,e}(s) = 1, \\ -C_M w_{i,e}(s) + J w_{\omega,e}(s) = 0, \end{cases}$$

а также 
$$\begin{cases} s w_{\alpha,M}(s) - w_{\omega,M}(s) = 0, \\ (Ls + R)w_{i,M}(s) + C_e w_{\omega,M}(s) = 0, \\ -C_M w_{i,M}(s) + J w_{\omega,M}(s) = -1. \end{cases}$$

Здесь  $w_{j,k}(s)$ ,  $j \in \{\alpha, i, \omega\}$ ,  $k \in \{e, M\}$  являются передаточными функциями от входов  $e(t)$ ,  $M(t)$  к переменным состояниям  $\alpha(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\omega(t)$ . Поскольку в данном примере выходом считается вектор  $[\alpha(t), i(t)]^T$ , нас будут интересовать четыре передаточные функции:  $w_{\alpha,e}(s)$ ,  $w_{\alpha,M}(s)$ ,  $w_{i,e}(s)$ ,  $w_{i,M}(s)$ . Найдём определители  $\Delta(s) = s(JLs^2 + JRs + C_e C_M)$ ,  $\Delta(s)_{\alpha,e} = C_M$ ,  $\Delta(s)_{\alpha,M} = -(Ls + R)$ ,  $\Delta(s)_{i,e} = Js^2$ ,  $\Delta(s)_{i,M} = C_e s$ , откуда получим матричную передаточную функцию системы (1.14):

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \frac{C_M}{s(JLs^2 + JRs + C_e C_M)} & \frac{-(Ls + R)}{s(JLs^2 + JRs + C_e C_M)} \\ \frac{Js}{JLs^2 + JRs + C_e C_M} & \frac{C_e}{JLs^2 + JRs + C_e C_M} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Заметим, что в данном примере сумма степеней знаменателей передаточных функций (даже с учетом сокращения ну-

лей и полюсов) равна десяти, в то время как система описывается уравнениями состояния третьего порядка. Можно сделать вывод, что для *многосвязных систем* (систем, имеющих несколько входов и выходов) уравнения состояния могут привести к реализации меньшего порядка, чем совокупность передаточных функций.<sup>12</sup>

Как видно из полученных выражений, рассматриваемый объект демонстрирует разнообразное поведение в зависимости от того, на какой вход поступает воздействие и какая выходная переменная определяется. По углу вращения ротора двигатель является звеном интегрирующего типа в сочетании с апериодическим звеном второго порядка или с колебательным звеном – в зависимости от соотношения параметров. Если  $JR^2 \geq 4LC_e C_M$ , то процесс имеет апериодический, иначе – колебательный, характер. По якорному току двигатель является звеном дифференцирующего типа (от напряжения источника) либо позиционным звеном (от момента нагрузки). Инерционность токовой цепи имеет тоже апериодический либо колебательный характер. В качестве иллюстрации на рис. 1.8 приведены графики переходных характеристик для передаточной функции (1.31).

**Пример 3. Летательные аппараты.** Обратимся теперь к уравнениям движения летательных аппаратов. Рассмотрим сначала угловое движение искусственного спутника, описанное в п. 1.4.2. с. 27. Уравнения ИСЗ (1.15) в форме (1.29), имеют вид

$$\begin{cases} sW_\gamma(s) - w_\omega(s) = 0, \\ J_x sW_\omega(s) = 1. \end{cases} \quad (1.32)$$

Отсюда получим  $\Delta(s) = J_x s^2$ ,  $\Delta_\gamma(s) = 1$ ,  $W(s) = \frac{K}{s^2}$ ,  $K = J_x^{-1}$ , т.е. рассматриваемая система представляет собой двойное интегрирующее звено.

Более сложной задачей является получение передаточных функций летательного аппарата с. 28, заданного уравнениями (1.16) (в линеаризованном виде – уравнениями состояния с матрицами (1.17)).

<sup>12</sup> В литературе встречаются следующие сокращения:

– при  $l = m = 1$  система относится к виду *SISO* (single input – single output),

– при  $l > 1, m > 1$  – к виду *MIMO* (multi input – multi output).

Возможны, соответственно, варианты *SIMO* и *MISO*.

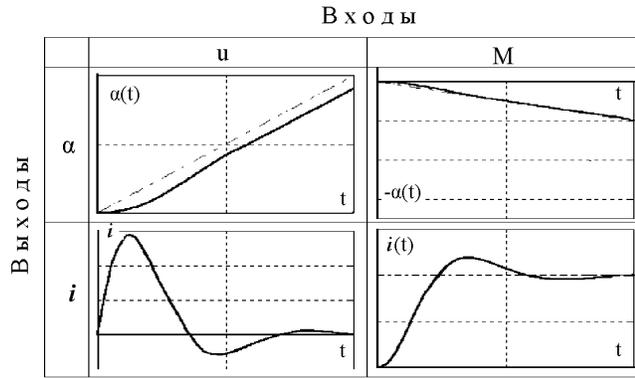


Рис. 1.8. Переходные характеристики двигателя.

Данная система описывается матричной передаточной функцией шестого порядка. Рассмотрим упрощенную модель пониженного порядка, в которой не учитываются некоторые переменные состояния, входы и выходы системы.

Как известно, в динамике ЛА можно выделить следующие процессы, отличающиеся темпом (скоростью протекания) [19, 23, 98]:

- изменение земной скорости  $V(t)$ ;
- изменение положения центра масс  $x(t)$ ,  $H(t)$ ;
- изменение углового положения координатных осей ЛА относительно центра масс:  $\theta(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\omega_z(t)$ .

Наиболее быстро протекают процессы изменения угловых координат, поэтому при исследовании этих процессов можно (приближенно) пренебрегать изменением скорости и высоты полета ЛА. Ниже рассмотрим модель изолированного углового движения, которая получается исключением уравнений для  $V$ ,  $x$ ,  $H$  из (1.16) и линеаризации. Опуская символ  $\Delta$  в обозначениях отклонений от опорной траектории, запишем линеаризованные уравнения в виде [23]

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = (-a_y^\theta + a_y^\alpha)\theta(t) - a_y^\alpha\vartheta(t) + a_y^{\delta_B}\delta_B(t), \\ \dot{\omega}_z(t) = a_{m_z}^\alpha\theta(t) - a_{m_z}^{\omega_z}\omega_z(t) - a_{m_z}^\alpha\vartheta(t) - a_{m_z}^{\delta_B}\delta_B(t), \\ \dot{\vartheta}(t) = \omega_z(t). \end{cases} \quad (1.33)$$

При рассмотрении углового движения часто можно пренебрегать (ввиду малости) коэффициентом  $a_y^\theta$ , характеризую-

шим влияние изменения проекции силы тяжести, а также коэффициентом подъемной силы рулей  $a_y^{\delta_b}$ . Кроме того, учтем соотношение  $\theta(t) = \vartheta(t) - \alpha(t)$ , справедливое для изолированного продольного движения без крена [19, 23, 98]. Уравнения (1.33) тогда примут вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \omega_z(t) + a_y^{\alpha} \alpha(t), \\ \dot{\omega}_z(t) = -a_{m_z}^{\alpha} \alpha(t) - a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z(t) - a_{m_z}^{\delta_b} \delta_b(t), \\ \dot{\vartheta}(t) = \omega_z(t). \end{cases} \quad (1.34)$$

Учитывая, что последнее уравнение можно учитывать отдельно, получим, что уравнения (1.29) для данного объекта имеют вид

$$\begin{cases} (s - a_y^{\alpha}) w_{\alpha}(s) - w_{\omega_z}(s) = 0, \\ -a_{m_z}^{\alpha} w_{\alpha}(s) + (s + a_{m_z}^{\omega_z}) w_{\omega_z}(s) = -a_{m_z}^{\delta_b}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Отсюда определяем передаточные функции ЛА по угловой скорости тангажа и углу атаки от отклонения рулей высоты:

$$\begin{aligned} W_{\omega_z}^{\delta_b}(s) &= \frac{-a_{m_z}^{\delta_b} (s - a_y^{\alpha})}{s^2 + (a_{m_z}^{\omega_z} + a_y^{\alpha})s + a_{m_z}^{\alpha} + a_y^{\alpha} a_{m_z}^{\omega_z}}, \\ W_{\alpha}^{\delta_b}(s) &= \frac{-a_{m_z}^{\delta_b}}{s^2 + (a_{m_z}^{\omega_z} + a_y^{\alpha})s + a_{m_z}^{\alpha} + a_y^{\alpha} a_{m_z}^{\omega_z}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

С учетом последнего уравнения в (1.34) передаточная функция по углу тангажа  $W_{\vartheta}^{\delta_b}(s) = \frac{1}{s} W_{\omega_z}^{\delta_b}(s)$ .

В зависимости от соотношения коэффициентов динамика углового движения ЛА обычно имеет колебательный либо неустойчивый (апериодический) характер. Основную роль здесь играет знак коэффициента  $a_{m_z}^{\alpha}$ . При  $a_{m_z}^{\alpha} > 0$  собственные движения представляют собой затухающие колебания, в противном случае – расходящийся процесс.<sup>13</sup>

Для получения передаточной функции непосредственно по выражению (1.25) можно использовать средства символьных вычислений пакета MATLAB-5 [82]. Например, определение передаточных функций  $W_{\omega_z}^{\delta_b}(s)$  и  $W_{\alpha}^{\delta_b}(s)$  по уравнениям (1.33) можно выполнить с помощью следующей программы.

---

<sup>13</sup> Более точные представления о влиянии параметров модели ЛА на характер собственных движений можно получить из рассмотрения характеристического многочлена (см. также [19, 98]).

Программа определения передаточной функции по уравнениям состояния

```

syms a_alpha_y a_delta_y a_alpha_m a_omega_m
syms a_delta_m a_thet_y s al thet om del
– описание символьных переменных;
I=eye(3,3); – единичная матрица;
A=[-a_thet_y+a_alpha_y, 0 ,-a_alpha_y;...
    a_alpha_m, -a_omega_m, -a_alpha_m;...
    0 1 0 ];
B=[a_delta_y; -a_delta_m; 0];
C=[0, 1, 0; -1, 0, 1];
– формирование матриц A, B, C уравнений (1.33);
W=C*inv(s*I-A)*B
– вычисление матричной передаточной функции;
[num,den]=numden(W);
– выделение числителя и знаменателя передаточной функции;
lln1=collect(num); d1=collect(den);
– приведение подобных членов в числителе и знаменателе.

```

В результате вычислений получают следующие выражения для передаточных функций  $W_{\omega_z}^{\delta_b}(s)$  и  $W_{\alpha}^{\delta_b}(s)$

$$W_{\omega_z}^{\delta_b}(s) = \frac{-s(a_{m_z}^{\delta_b} s - a_{m_z}^{\alpha} a_y^{\delta_b} + a_{m_z}^{\delta_b} (a_y^{\theta} - a_y^{\alpha}))}{A(s)},$$

$$W_{\alpha}^{\delta_b}(s) = -\frac{a_y^{\delta_b} s^2 + (a_y^{\delta_b} a_{m_z}^{\omega_z} + a_{m_z}^{\delta_b})s + a_{m_z}^{\delta_b} a_y^{\theta}}{A(s)},$$

где  $A(s) = s^3 + (a_{m_z}^{\omega_z} - a_y^{\alpha} + a_y^{\theta})s^2 + (a_{m_z}^{\alpha} + (a_y^{\theta} - a_y^{\alpha})a_{m_z}^{\omega_z})s + a_y^{\theta}a_{m_z}^{\alpha}$ .

После выполнения упрощающей подстановки  $a_y^{\theta} = 0$ ,  $a_y^{\delta_b} = 0$  с помощью операторов

```

n2=subs(n1,[a_thet_y,a_delta_y],[0 0])
d2=subs(d1,[a_thet_y,a_delta_y],[0 0])

```

получаем записанные ранее выражения (1.36).

**Пример 4. Механические конструкции.** Найдем передаточные функции амортизированного транспортного средства от высоты поверхности к вертикальному перемещению

корпуса и к расстоянию от оси подвески колеса до поверхности (см. пример 2 п. 1.4.3. с. 32). Уравнения состояния с матрицами (1.19) приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} sw_1(s) - w_2(s) = 0, \\ k_1 w_1(s) + m_1 s w_2(s) - k_1 w_3(s) = 0, \\ sw_3(s) - w_4(s) = 0, \\ -k_1 w_1(s) + (k_1 + k_2) w_3(s) + m_2 s w_4(s) = k_2. \end{cases}$$

Исключая  $w_2(s)$ ,  $w_4(s)$ , приходим к системе

$$\begin{cases} (m_1 s^2 + k_1) w_1(s) - k_1 w_3(s) = 0, \\ -k_1 w_1(s) + (m_2 s^2 + k_1 + k_2) w_3(s) = k_2. \end{cases} \quad (1.37)$$

Из (1.37) следует:  $\Delta(s) = (m_1 s^2 + k_1)(m_2 s^2 + k_1 + k_2) - k_1^2 = m_1 m_2 s^4 + (k_1 m_1 + k_1 m_2 + k_2 m_1) s^2 + k_1 k_2$ ,  $\Delta_1(s) = k_1 k_2$ ,  $\Delta_3(s) = k_2(m_1 s^2 + k_1)$ . Учитывая выражение для выхода (согласно (1.19)), получим передаточные функции  $W_1(s) = \frac{k_1 k_2}{\Delta(s)}$

(к  $h_1(t)$ ) и  $W_2(s) = -\frac{m_1 s^2 (m_2 s^2 + k_1)}{\Delta(s)}$  (к  $h_2(t) - h_3(t)$ ). Нетрудно проверить, что характеристический многочлен  $\Delta(s)$  имеет чисто мнимые корни  $s_{1,2} = \pm j\omega_1$ ,  $s_{3,4} = \pm j\omega_2$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Следовательно, данная система может рассматриваться, как соединение двух консервативных звеньев. Полученный результат справедлив, если трение пренебрежимо мало.

Рассмотрим теперь приведенную в п. 1.20 на с. 30 линеаризованную модель трехстепенного гироскопа (1.20). В соответствии с этой моделью, после исключения вспомогательных переменных получаем уравнения

$$\begin{cases} s(J_C s + \mu_C) W_\alpha^{M_C}(s) - H \cos \beta_0 s W_\beta^{M_C}(s) = 1, \\ H \cos \beta_0 s W_\alpha^{M_C}(s) + s(J_B s + \mu_B) W_\beta^{M_C}(s) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} s(J_C s + \mu_C) W_\alpha^{M_C}(s) - H \cos \beta_0 s W_\beta^{M_C}(s) = 0, \\ H \cos \beta_0 s W_\alpha^{M_C}(s) + s(J_B s + \mu_B) W_\beta^{M_C}(s) = 1, \end{cases}$$

откуда находим следующие передаточные функции:

$$W_\alpha^{M_C}(s) = \frac{J_B s + \mu_B}{s A(s)}, \quad W_\beta^{M_C}(s) = W_\beta^{M_C}(s) = -\frac{H \cos \beta_0}{s A(s)},$$

$W_\beta^{M_B}(s) = \frac{J_C s + \mu_C}{s A(s)}$ , где  $A(s) = J_B J_C s^2 + (J_B \mu_C + J_C \mu_B) s + \mu_B \mu_C + H^2 \cos^2 \beta_0$ . Таким образом, данную систему можно представить в виде сочетания интегрирующего и колебательного

звеньев с постоянной времени  $T = \sqrt{\frac{J_B J_C}{\mu_B \mu_C + H^2 \cos^2 \beta_0}}$  и коэффициентом демпфирования  $\xi = \frac{J_B \mu_C + J_C \mu_B}{2\sqrt{J_B J_C (\mu_B \mu_C + H^2 \cos^2 \beta_0)}}$ . Частота собственных *нутацонных колебаний* [91]  $\omega_n \approx T^{-1}$ . Заметим, что из  $\mu_B = \mu_C = 0$  следует  $\xi = 0$ . Тогда колебательное звено становится консервативным и нутации не затухают. Присущее гироскопу свойство интегрирования примененных к рамкам моментов соответствует явлению *прецессии* [91].

**Пример 5. Дискретные системы.** Для "дискретного интегратора" (сумматора), реализующего рекуррентный алгоритм  $x[k+1] = x[k] + u[k]$ ,  $y[k] = x[k]$ , передаточная функция имеет вид  $W(z) = \frac{1}{z-1}$ , в чем нетрудно убедиться непосредственным применением формулы (1.25). При  $y[k] = x[k] + u[k]$  получаем  $W(z) = \frac{z}{z-1}$ . В системах реального времени при интегрировании следует учитывать интервал квантования  $T_0$ . Тогда получим, соответственно,  $W(z) = \frac{T_0}{z-1}$  либо  $W(z) = \frac{T_0 z}{z-1}$ .

Рассмотрим теперь пример "*сглаживающего устройства*" – нерекурсивного цифрового фильтра (1.22), с. 33, реализующего алгоритм вычисления скользящего среднего.

Из (1.22) получаем систему уравнений для передаточных функций  $w_i$ :

$$\begin{cases} zw_1(z) = 1, \\ -w_1(z) + zw_2(z) = 0, \\ -w_2(z) + zw_3(z) = 0, \\ -w_3(z) + zw_4(z) = 0, \end{cases}$$

откуда  $w_i(z) = z^{-i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Учитывая уравнение выхода в (1.22), получим передаточную функцию фильтра

$$W(z) = \frac{1+z+z^2+z^3}{4z^4}. \quad (1.38)$$

Обратимся теперь к использованию передаточных функций для получения частотных характеристик систем.

## 1.6. Частотные характеристики

Одной из причин, обусловивших широкое использование передаточных функций, является их связь с частотными характеристиками. Рассмотрим отдельно непрерывные и дискретные системы.

### 1.6.1. Частотные характеристики непрерывных систем

Рассмотрим стационарную систему (1.23). Пусть  $u(t) = \bar{u}e^{s_0t}$ , где постоянные  $\bar{u} \in \mathcal{R}^m$ ,  $s_0 \in \mathcal{C}$ . Будем искать решение (1.23) в виде  $x(t) = \bar{x}e^{s_0t}$ , где  $\bar{x} \in \mathcal{C}^n$  – подлежащая определению константа. Подстановка выражений для  $u(t)$ ,  $x(t)$  в (1.23) дает  $s_0\bar{x}e^{s_0t} = A\bar{x}e^{s_0t} + B\bar{u}e^{s_0t}$ ,  $(s_0\mathbf{I} - A)\bar{x}e^{s_0t} = B\bar{u}e^{s_0t}$ ,  $(s_0\mathbf{I} - A)\bar{x} = B\bar{u}$ . Полагаем, что имеет место *нерезонансный случай*:  $s_0$  не совпадает ни с одним собственным числом матрицы  $A$  и поэтому  $\det(s_0\mathbf{I} - A) \neq 0$ . Отсюда находим, что  $\bar{x} = (s_0\mathbf{I} - A)^{-1}B\bar{u}$  и, следовательно, выполнено равенство

$$x(t) = (s_0\mathbf{I} - A)^{-1}B\bar{u}e^{s_0t}. \quad (1.39)$$

Прежде чем использовать полученное выражение, исследуем единственность найденного решения. Пусть функция  $\tilde{x}(t)$  также удовлетворяет (1.23). Подстановкой  $x(t) = \tilde{x}(t) + \Delta x(t)$  в (1.23) непосредственно убеждаемся, что  $\Delta x(t)$  удовлетворяет *однородному уравнению*, получающемуся из (1.23) при  $u(t) \equiv 0$ . Следовательно, любое решение (1.23) можно представить в виде суммы *вынужденной* (1.39) и *переходной* составляющих. Поэтому найденное решение единственно с точностью до переходной составляющей  $\Delta x(t)$ . При асимптотической устойчивости системы  $\Delta x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и каждое решение стремится к вынужденному процессу (1.39).

Подставим теперь полученное выражение для  $x(t)$  в уравнение выхода (1.23):  $y(t) = Cx(t) + Du(t) = C(s_0\mathbf{I} - A)^{-1}B\bar{u}e^{s_0t} + D\bar{u}e^{s_0t} = (C(s_0\mathbf{I} - A)^{-1}B + D)\bar{u}e^{s_0t} = \mathbf{W}(s_0)\bar{u}e^{s_0t} = \mathbf{W}(s_0)u(t)$ . Таким образом, передаточная функция является множителем (в общем случае – комплексным), связывающим вынужденную составляющую выходного процесса системы со входным сигналом экспоненциального вида. Это свойство позволяет найти и реакцию системы на гармонический входной сигнал, т.е. *частотные характеристики* системы.

Пусть входной процесс имеет вид гармонических колебаний  $u(t) = \bar{u} \cos \omega t \equiv \bar{u} \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ , где  $\omega$  – вещественная константа, частота колебаний,  $j^2 = -1$ . Используя полученную выше формулу при  $s_0 = \pm j\omega$  и очевидное свойство суперпозиции решений линейных систем, получим

$$y(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{W}(j\omega)e^{j\omega t} + \mathbf{W}(j\omega)e^{-j\omega t}) \bar{u}. \quad (1.40)$$

**Определение.** Выражение  $\mathbf{W}(j\omega)$  ( $\omega \in \mathcal{R}, j^2 = -1$ ) называется *частотной передаточной функцией* или *частотной характеристикой* непрерывной системы (1.23).  $\square$

Каждый элемент  $W_{ij}(j\omega)$  матричной функции  $\mathbf{W}(j\omega)$  можно представить в виде <sup>14</sup>

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\omega + \varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где  $A(\omega) \triangleq |\mathbf{W}(j\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика (АФХ);

$\varphi(\omega) \triangleq \arg \mathbf{W}(j\omega)$  – фазо-частотная характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) \triangleq \operatorname{Re} \mathbf{W}(j\omega)$ ,  $V(\omega) \triangleq \operatorname{Im} \mathbf{W}(j\omega)$  – вещественная и мнимая частотные характеристики (ВЧХ, МЧХ).

Годограф  $\mathbf{W}(j\omega)$  на комплексной плоскости при  $\omega \in [\omega_0, \omega_1]$  (обычно берут  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = \infty$ ) называется *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ), или *кривой Найквиста*. Часто используется и *диаграмма Боде* (логарифмическая амплитудная характеристика, ЛАХ), которая определяется как  $L(\omega) \triangleq 20 \lg A(\omega)$ , измеряется в децибелах и строится в функции от  $\lg(\omega)$ .

Поскольку  $\mathbf{W}(\lambda)$  – рациональная функция с вещественными коэффициентами, выполнено  $U(-\omega) = U(\omega)$ ,  $V(-\omega) = -V(\omega)$ , т.е.  $\mathbf{W}(-j\omega) = \operatorname{conj}(\mathbf{W}(j\omega))$ ,  $A(-\omega) = A(\omega)$ ,  $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ .

При вычислении фазо-частотной характеристики учитывается, что  $\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$  при  $U(\omega) \neq 0$ . Но функция  $\operatorname{arctg}(\cdot)$

принимает значения в интервале  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , поэтому при ее использовании  $\varphi(\omega)$  будет иметь нежелательные разрывы. Из соображений непрерывности целесообразно предварительно разлагать числитель и знаменатель  $\mathbf{W}(j\omega)$  на множители не

<sup>14</sup> Для краткости записи индексы далее опускаем.

более второго порядка (что всегда возможно)

$$W(j\omega) \equiv \frac{\prod_{i=1}^l r_i(j\omega)}{\prod_{i=l+1}^L r_i(j\omega)}$$

и вычислять  $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^L (\pm \varphi_i(\omega))$ , где знак ”+” относится к  $i = 1, 2, \dots, l$  (числителю передаточной функции), а знак ”-” – к  $i = l+1, i+2, \dots, L$  (знаменателю передаточной функции). Каждое из слагаемых  $\varphi_i(\omega)$  определяется выражением

$$\varphi_i(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{V_i(\omega)}{U_i(\omega)} & \text{при } U_i(\omega) > 0, \\ \frac{\pi}{2} \text{sign} V_i(\omega) & \text{при } U_i(\omega) = 0, V_i(\omega) \neq 0, \\ \arctg \frac{V_i(\omega)}{U_i(\omega)} + \pi \text{sign} V_i(\omega) & \text{при } U_i(\omega) < 0, V_i(\omega) \neq 0, \\ \text{не определено} & \text{при } U_i(\omega) = V_i(\omega) = 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

где  $U_i(\omega) = \text{Re } r_i(j\omega)$   $V_i(\omega) = \text{Im } r_i(j\omega)$ .

Чтобы прояснить смысл частотных характеристик, рассмотрим при указанном входе реакцию (вынужденную составляющую)  $i$ -й компоненты вектор-функции  $y(t)$  на  $j$ -ю компоненту вектора  $u_j(t)$ . Используя выражение (1.40), получим

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{1}{2} (W(j\omega)e^{j\omega t} + W(j\omega)e^{-j\omega t}) \bar{u}_j = \\ &= \frac{1}{2} A(\omega) (e^{j(\varphi(\omega)+\omega t)} + e^{-j(\varphi(\omega)+\omega t)}) = \bar{y}_i \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где  $\bar{y}_i = A(\omega) \bar{u}_j$  – амплитуда выходного процесса (точнее – его вынужденной составляющей), а  $\varphi = \varphi(\omega)$  – ”фазовый сдвиг” между входным и выходным процессами. Таким образом, зная передаточную функцию системы, нетрудно определить ее реакцию на гармоническое воздействие (или суперпозицию таких воздействий).

Обратимся теперь к системам дискретного времени.

### 1.6.2. Частотные характеристики дискретных систем

Рассмотрим стационарную дискретную систему (1.24) при  $u[k] = \bar{u} z_0^k$ , где  $\bar{u} \in \mathcal{R}^m$ ,  $z_0 \in \mathcal{C}$ ,  $z_0 \neq 0$ . Ищем решение (1.24) в виде  $x[k] = \bar{x} z_0^k$  для некоторого  $\bar{x} \in \mathcal{C}^n$ . Аналогично непрерывному случаю подстановкой  $u[k]$ ,  $x[k]$  в (1.24) получаем  $\bar{x} z_0^{k+1} = A \bar{x} z_0^k + B \bar{u} z_0^k$ ,  $(z_0 \mathbf{I} - A) \bar{x} = B \bar{u}$ . Для нерезонансного

случая  $\det(z_0\mathbf{I} - A) \neq 0$ , откуда получим  $\bar{x} = (z_0\mathbf{I} - A)^{-1}B\bar{u}$ , следовательно

$$x[k] = (z_0\mathbf{I} - A)^{-1}B\bar{u}z_0^k. \quad (1.42)$$

Как и для непрерывных систем, формула (1.42) дает вынужденную составляющую решения. Выходной процесс (с точностью до переходной составляющей) описывается выражением  $y[k] = Cx[k] + Du[k] = C(z_0\mathbf{I} - A)^{-1}B\bar{u}z_0^k + D\bar{u}z_0^k = (C(z_0\mathbf{I} - A)^{-1}B + D)\bar{u}z_0^k = \mathbf{W}(z_0)\bar{u}z_0^k = \mathbf{W}(z_0)u[k]$ .

Рассмотрим далее "гармонический" входной процесс  $u[k] = \bar{u} \cos \bar{\omega}k \equiv \bar{u} \frac{1}{2}(e^{j\bar{\omega}k} + e^{-j\bar{\omega}k})$ , где вещественный параметр  $\bar{\omega}$  – безразмерная частота.<sup>15</sup> Последовательность  $u[k]$  можно представить в виде  $u[k] = \bar{u} \frac{1}{2}(z_+^k + z_-^k)$ , где  $z_{\pm} = e^{\pm j\bar{\omega}}$ . Отсюда, полагая в (1.42)  $z_0 = \pm e^{j\bar{\omega}}$ , получим

$$y[k] = \frac{1}{2} (\mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})e^{j\bar{\omega}k} + \mathbf{W}(e^{-j\bar{\omega}})e^{-j\bar{\omega}k}) \bar{u}.$$

**Определение.** Выражение  $\mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})$  называется *частотной передаточной функцией*, или *частотной характеристикой* дискретной системы (1.24) от безразмерной частоты  $\bar{\omega}$ .  $\square$

После рассуждений, аналогичных приведенным в п. 1.6.1. с. 46, вводим следующие частотные характеристики дискретных систем [15, 47, 66, 76, 95]

$A(\bar{\omega}) \triangleq |\mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})|$  – амплитудно-частотная характеристика ( $A\Phi X$ ),  $A(-\bar{\omega}) = A(\bar{\omega})$ ;

$\varphi(\bar{\omega}) \triangleq \arg \mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})$  – фазо-частотная характеристика ( $\Phi\varphi X$ ),  $\varphi(-\bar{\omega}) = -\varphi(\bar{\omega})$ ;

$U(\bar{\omega}) \triangleq \operatorname{Re} \mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})$ ,  $V(\bar{\omega}) \triangleq \operatorname{Im} \mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})$  – вещественная и мнимая частотные характеристики ( $B\varphi X$ ,  $M\varphi X$ ),  $U(-\bar{\omega}) = U(\bar{\omega})$ ,  $V(-\bar{\omega}) = -V(\bar{\omega})$ .

Особенностью частотных характеристик дискретных систем является их периодичность с периодом  $2\pi$ :  $\mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}+2\pi N}) = \mathbf{W}(e^{j\bar{\omega}})$ ,  $N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Формально это связано с тем, что аргумент  $z$  дискретной передаточной функции  $\mathbf{W}(z)$  при подстановке  $z = e^{j\bar{\omega}}$  принимает периодически повторяющиеся значения, "пробегаая" на комплексной плоскости окружность единичного радиуса. С точки зрения "физического"

<sup>15</sup> Отметим, что гармонические функции дискретного аргумента  $k$  могут иметь период, отличающийся от  $2\pi\omega^{-1}$ , или вообще не иметь периода; кроме того, наибольшее значение  $|u[k]|$  может не достигать  $|\bar{u}|$ .

смысла частотных характеристик заметим, что дискретные входные процессы, частоты которых отличаются на  $2\pi N$ , неразличимы, образуют одну и ту же последовательность  $(\cos \bar{\omega}k \equiv \cos(\bar{\omega} \pm 2\pi N)k)$ . Поэтому при вычислении частотных характеристик достаточно рассматривать  $\bar{\omega} \in [0, 2\pi)$ , более того, в силу симметрии годографа  $W(e^{j\bar{\omega}})$  относительно вещественной оси брать  $\bar{\omega} \in [0, \pi]$ . Частота  $\bar{\omega}_N = \pi$  называется иногда *частотой Найквиста* дискретной системы. При  $\bar{\omega} > \bar{\omega}_N$  получаются повторяющиеся (симметрично) значения АЧХ и ФЧХ.

### 1.6.3. Частотные характеристики цифровых систем реального времени

Остановимся на распространенном и практически важном способе применения дискретных систем, при котором входной процесс  $u[k]$  получается, как "дискретная выборка" непрерывного сигнала  $u(t)$  с *периодом квантования*  $T_0$ :  $u[k] = u(t)|_{t=kT_0}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Нас интересуют частотные характеристики дискретной системы в функции от *реальной частоты*  $\omega$  непрерывного процесса  $u(t)$ . Полагая  $u(t) = \bar{u} \cos \omega t$ , найдем  $u[k] = \bar{u} \cos(\omega k T_0)$ . Сравнивая с предыдущим пунктом, видим, что эти последовательности совпадают при  $\bar{\omega} = \omega T_0$ . Поэтому частотные характеристики систем реального времени получаются подстановкой  $z = e^{j\omega T_0}$  в  $\mathbf{W}(z)$ :  $A(\omega) = |\mathbf{W}(e^{j\omega T_0})|$ ,  $\varphi(\omega) = \arg \mathbf{W}(e^{j\omega T_0})$ ,  $U(\omega) = \operatorname{Re} \mathbf{W}(e^{j\omega T_0})$ ,  $V(\omega) = \operatorname{Im} \mathbf{W}(e^{j\omega T_0})$ , где  $\mathbf{W}(e^{j\omega T_0})$  есть *частотная передаточная функция (частотная характеристика)* дискретной системы по реальной частоте  $\omega$ .

Частота Найквиста дискретной системы реального времени  $\omega_N = \pi/T_0$ . Начиная с  $\omega_N$  вид частотных характеристик повторяется, их нельзя задавать независимо от значений в "основной" полосе частот  $|\omega| \leq \omega_N$ . Поэтому, если дискретная система реального времени подвержена действию высокочастотных помех или возмущений, то для возможности их фильтрации должно выполняться условие  $|\Omega| \leq \omega_N$ , где  $\Omega$  – граничная частота спектра входного процесса  $u(t)$ . Добиться выполнения этого условия можно уменьшая период дискретности  $T_0$ , однако в силу ряда причин слишком малые значения

$T_0$  нежелательны.<sup>16</sup> Наиболее общим решением в этой ситуации является использование предварительного аналогового фильтра нижних частот, который вводится до аналогоцифрового преобразователя. АЧХ такой системы равна произведению амплитудных характеристик пре-фильтра и цифрового устройства и имеет ограниченную полосу пропускания.

#### 1.6.4. Примеры расчета частотных характеристик

Рассмотрим некоторые примеры вычисления частотных характеристик.

**Пример 1. Колебательный контур.** Как показано в п. 1.5.3. с. 38, передаточная функция колебательного контура (1.13) имеет вид

$$W(s) = \frac{Ks^2}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}, \quad \text{где } T = \sqrt{LC}, \quad K = LC = T^2, \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Выполнив подстановку  $s = j\omega$ ,  $\omega \in \mathcal{R}$ , получим амплитудно-частотную характеристику

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \frac{K\omega^2}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} = \\ &= \frac{LC\omega^2}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}. \end{aligned}$$

Согласно (1.41), с. 48, фазо-частотная характеристика при  $\omega \geq 0$  описывается выражением

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg} \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} & \text{при } LC\omega^2 < 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } LC\omega^2 = 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{RC\omega}{-1 + LC\omega^2} & \text{при } LC\omega^2 > 1. \end{cases}$$

Как видно из АЧХ, данная система является *фильтром верхних частот (ВЧ-фильтром)*. Граница полосы пропускания определяется условием  $A(\omega)^2 \geq 0.5$ . Пусть, например,  $R = 800$  [Ом],  $L = 4$  [Гн],  $C = 10^{-5}$  [Ф]. Тогда  $T = 6.32 \cdot 10^{-3}$  [с],  $\xi = 0.63$ , полоса пропускания начинается с частоты  $\omega_c = 200$  [1/с]. График АЧХ приведен на рис. 1.9

<sup>16</sup> Например, из-за недостаточной производительности процессора или возрастания влияния ошибок, связанных с конечным числом разрядов ЭВМ.

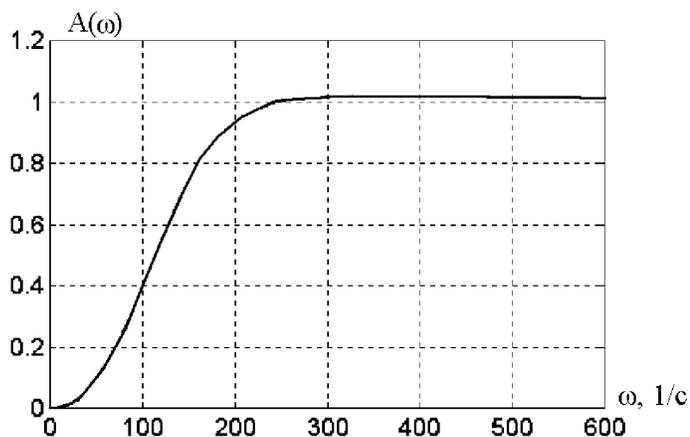


Рис. 1.9. Амплитудно-частотная характеристика колебательного контура

Текст программы на языке MATLAB для расчета АЧХ колебательного контура

```

L=4.0; R=800; C=10e-6;
- задание значений параметров;
T=sqrt(L*C), xi=R/2*sqrt(C/L), K=L*C
- вычисление T, xi, K
ommax=600; omega=0:ommax/100:ommax;
- задание значений частоты omega;
s=j*omega; % - определение аргумента s = j*omega;
W=K*s.^2 ./ (T.^2*s.^2 + 2*xi*T*s + 1);
- подстановка s в W(s);
A=abs(W);
- вычисление АЧХ;
plot(omega, A, 'w'), grid
- вывод АЧХ на график. Параметр 'w' задает цвет линии
на графике (см. [72, 81, 139])

```

**Пример 2. Летательный аппарат.** Получим теперь диаграмму Бode (логарифмические частотные характеристики) рассмотренного выше в примере 2 на с. 28 летательного аппарата (1.16). Линеаризованная модель продольного углового движения ЛА принята в виде (1.33), а соответствующие передаточные функции имеют вид (1.36). Рассмотрим

легкий ЛА со следующими значениями параметров на некотором режиме полета [4]:  $a_y^\alpha = -2.10 [c^{-1}]$ ,  $a_y^\delta = 0.16 [c^{-1}]$ ,  $a_{m_z}^\alpha = 29.4 [c^{-2}]$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z} = 2.18 [c^{-1}]$ ,  $a_{m_z}^{\delta_b} = 60.7 [c^{-2}]$ . Выполняя вычисления, получим следующую передаточную функцию по углу тангажа:

$$W_{\vartheta}^{\delta_b}(s) = \frac{-(60.7s + 127)}{s(s^2 + 4.28s + 34.0)} = \frac{-k_{\vartheta}(\tau s + 1)}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)},$$

где коэффициент передачи  $k_{\vartheta} = 3.75 [c^{-1}]$ , постоянные времени  $\tau = 0.48 [c]$ ,  $T = 0.17 [c]$ , коэффициент демпфирования  $\xi = 0.37$ . Диаграмма Боде (ЛАХ) летательного аппарата по углу тангажа представлена на рис. 1.10

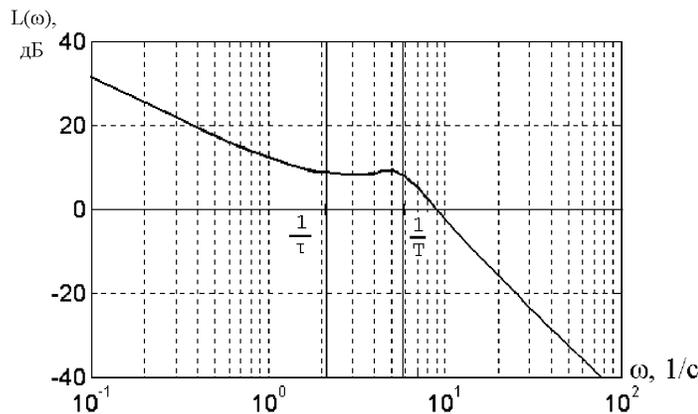


Рис. 1.10. Диаграмма Боде летательного аппарата.

Текст программы на языке MATLAB для расчета частотных характеристик летательного аппарата

```

a_alpha_y= -2.10;   a_delta_y= 0.16;
a_alpha_m= 29.4;   a_omega_m = 2.18;
a_delta_m= 60.7;
- задание значений параметров  $a_y^\alpha$ ,  $a_y^\delta$ ,  $a_{m_z}^\alpha$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z}$ ,  $a_{m_z}^{\delta_b}$  уравнений (1.33);
num=- a_delta_m*[1, - a_alpha_y]
den=[1, a_omega_m, -a_alpha_y, ...

```

```

a_alpha_m, -a_alpha_y*a_omega_m, 0]
– формирование массивов коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции ЛА  $W_y^{\delta_p}(s)$  из (1.34);
k=-n1(2)/d1(3), tau=n1(1)/n1(2)
T=sqrt(1/d1(3)), ksi=d1(2)/d1(3)/2/T
– вычисление параметров  $k_\theta, \tau, T, \xi$  передаточной функции  $W_y^{\delta_p}(s)$ ;
om=logspace(-1, 2);
– задание значений частоты  $\omega$ ;
[mag, phase]=bode(num, den, om);
– вычисление частотных характеристик с помощью процедуры bode (см. Приложение)
lmag=20*log10(mag);
– перевод значений АЧХ в децибелы;
semilogx(om, lmag, 'w', 1/tau, 0, '+w', 1/T, 0, '+w'),
grid
– вывод диаграммы Боде (ЛАХ) на график. Символы '+' выводятся на оси  $\omega$  для указания сопрягающих частот [15, 76].

```

Для численного нахождения передаточных функций и частотных характеристик непосредственно по уравнениям состояния системы можно использовать MATLAB-программу:

```

A=[a_alpha_y, 0, -a_alpha_y;...
    a_alpha_m, -a_omega_m, -a_alpha_m;...
    0    1    0];
B=[a_delta_y; -a_delta_m; 0]; C=[0 0 1]; D=0;
– формирование матриц уравнений состояния ЛА (1.33)
[n, d]=ss2tf(A, B, C, D, 1);
– вычисление массивов коэффициентов матричной передаточной функции ЛА;
[mag, phase]=bode(A, B, C, D, 1, om);
– вычисление частотных характеристик.

```

Заметим, что результаты вычислений будут несколько отличаться из-за влияния параметра  $a_y^{\delta_p}$ , характеризующего подъемную силу рулей высоты. Этот параметр не учитывается в (1.34) для компактности выражений, но включен в матрицу **B** в программе.

**Пример 3. Амортизированная транспортная система** Найдем частотные характеристики транспортной системы (1.19), с. 32. По передаточным функциям  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ , полученным в п. 1.5.3. (пример 4, с. 38), получаем следующие выражения для АЧХ:

$$A_1(\omega) = \frac{k_1 k_2}{|m_1 m_2 \omega^4 - (k_1 m_1 + k_1 m_2 + k_2 m_1) \omega^2 + k_1 k_2|},$$

$$A_2(\omega) = \frac{m_1 \omega^2 |k_1 - m_2 \omega^2|}{|m_1 m_2 \omega^4 - (k_1 m_1 + k_1 m_2 + k_2 m_1) \omega^2 + k_1 k_2|}.$$

В качестве примера на рис. 1.11 показаны АЧХ, рассчитанные при следующих значениях параметров [126]:  $m_1 = 500$  [кг],  $m_2 = 400$  [кг],  $k_1 = 60$  [кН/м],  $k_2 = 170$  [кН/м].

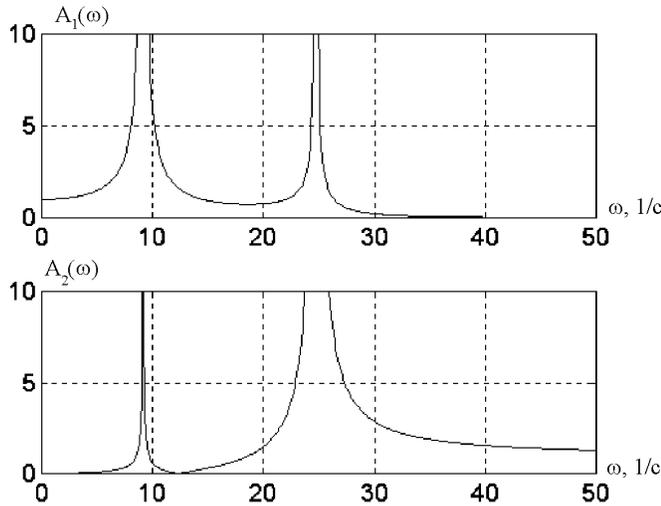


Рис. 1.11. АЧХ транспортной системы.

Текст MATLAB-программы для расчета частотных характеристик транспортной системы

```
k_1= 60e3 ; k_2= 170e3 ;
m_1= 500 ; m_2= 400 ;
- ввод параметров системы;
ommax= 50 ; omega=0:ommax/500:ommax;
```

– задание значений частоты  $\omega$ ;  
 $A_1 = k_1 * k_2 ./ \text{abs}(m_1 * m_2 * \omega.^4 - \dots$   
 $(k_1 * m_1 + k_1 * m_2 + k_2 * m_1) * \omega.^2 + k_1 * k_2);$   
 $A_2 = m_1 * \omega.^2 .* \text{abs}(k_1 - m_2 * \omega.^2) ./ \dots$   
 $\text{abs}(m_1 * m_2 * \omega.^4 - \dots$   
 $(k_1 * m_1 + k_1 * m_2 + k_2 * m_1) * \omega.^2 + k_1 * k_2);$   
– вычисление АЧХ  $A_1(\omega)$ ,  $A_2(\omega)$ ;  
subplot(211), plot(omega, A\_1, 'w'), grid  
axis([0 ommax 0 10])  
subplot(212), plot(omega, A\_2, 'w'), grid  
axis([0 ommax 0 10])  
– вывод графиков АЧХ. Параметр **axis** задает диапазоны координатных осей.

В данной программе вычисления выполнены по приведенным выше аналитическим выражениям. Аналогично примеру 2, можно не выполнять аналитических выкладок, а получать АЧХ численно по матрицам уравнений состояния системы с помощью процедуры **bode**.

**Пример 4. Цифровой фильтр.** В п. 1.5.3. с. 45, получена передаточная функция нерекурсивного цифрового фильтра (1.22), имеющая вид (1.38)  $W(z) = \frac{1 + z + z^2 + z^3}{4z^4}$ . Для нахождения частотных характеристик фильтра выполним подстановку  $z = e^{j\bar{\omega}}$ . Получим  $W(e^{j\bar{\omega}}) = \frac{1 + e^{j\bar{\omega}} + e^{2j\bar{\omega}} + e^{3j\bar{\omega}}}{4e^{4j\bar{\omega}}}$ . В рассматриваемом случае ввиду симметрии выражения для  $W(z)$  при расчете частотных характеристик удобно выполнить преобразование  $W(e^{j\bar{\omega}}) = 0.25(e^{-4j\bar{\omega}} + e^{-3j\bar{\omega}} + e^{-2j\bar{\omega}} + e^{-j\bar{\omega}}) = 0.25 \cdot e^{-2.5j\bar{\omega}}(e^{-1.5j\bar{\omega}} + e^{-0.5j\bar{\omega}} + e^{0.5j\bar{\omega}} + e^{1.5j\bar{\omega}}) = 0.5 \cdot e^{-2.5j\bar{\omega}}(\cos 1.5\bar{\omega} + \cos 0.5\bar{\omega}) = e^{-2.5j\bar{\omega}} \cos \bar{\omega} \cos 0.5\bar{\omega}$ . Отсюда АЧХ фильтра  $A(\bar{\omega}) \equiv |W(e^{j\bar{\omega}})| = |\cos(\bar{\omega}) \cos(0.5\bar{\omega})|$ . График  $A(\bar{\omega})$  представлен на рис. 1.12.

Текст MATLAB-программы для расчета частотных характеристик цифрового фильтра

**omega=0:0.005:2\*pi; z=exp(i\*omega);**  
– определение значений аргумента  $z = e^{j\bar{\omega}}$  передаточной функции для вычисления частотных характеристик дискретной системы;  
**W = (1 + z + z.^2 + z.^3) ./ z.^4/4;**  
– вычисление  $W(e^{j\bar{\omega}})$ ;

```

A=abs(W);
plot(omega, A, 'w'), grid, axis([0, 2*pi, 0, 1])

```

– вычисление АЧХ и вывод графика.

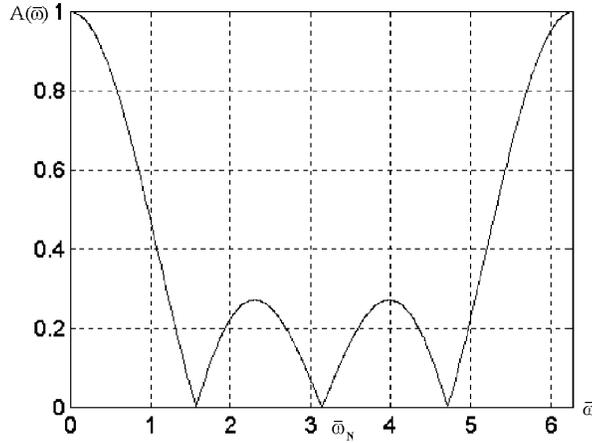


Рис. 1.12. АЧХ цифрового фильтра

**З а м е ч а н и е .** В рассмотренных выше примерах частотные характеристики определялись после представления передаточных функций по соответствующим входам и выходам в виде отношения многочленов. В вычислительном отношении оказывается предпочтительным пользоваться непосредственно подстановкой  $\lambda = j\omega$  (либо  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$  – для дискретных систем) в выражение для резольвенты  $\mathbf{R}(\lambda) = (\lambda \mathbf{I}_n - A)^{-1}$ . Затем используются соотношения  $\mathbf{R}(\gamma + j\delta) = ((\gamma + j\delta)\mathbf{I}_n - A)^{-1} = (\gamma\mathbf{I}_n - A - j\delta\mathbf{I}_n)((\gamma\mathbf{I}_n - A)^2 + \delta^2\mathbf{I}_n)^{-1} = \mathbf{U} + j\mathbf{V}$ , где  $\gamma = \text{Re}\lambda, \delta = \text{Im}\lambda$  (при  $\lambda = j\omega$  подставляются значения  $\gamma = 0, \delta = \omega$ , а при  $\lambda = e^{j\bar{\omega}}$  значения  $\gamma = \cos\bar{\omega}, \delta = \sin\bar{\omega}$ ). В результате численно находятся матричные значения вещественной и мнимой частотных характеристик  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ . Умножая их на матрицы  $C, B$ , получаем вещественную и мнимую частотные характеристики по заданному входу и выходу. Такой способ позволяет избежать вычисления передаточных функций от параметра  $\lambda$  и, кроме того, использовать эффективные вычислительные алгоритмы матричной алгебры.

## 1.7. Уравнения состояния при соединении систем

Во многих случаях возникает необходимость получить единые уравнения для системы, состоящей из нескольких соединенных между собой подсистем. Такие системы иногда называются "композитивными". Рассмотрим, как выглядит решение этой задачи при описании моделей систем уравнениями состояния [47].

### 1.7.1. Независимые подсистемы

Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда композитивная система состоит из двух независимых подсистем (рис. 1.13, а). Входом системы является вектор, полученный объединением входов каждой подсистемы, а выходом – объединение их выходов.

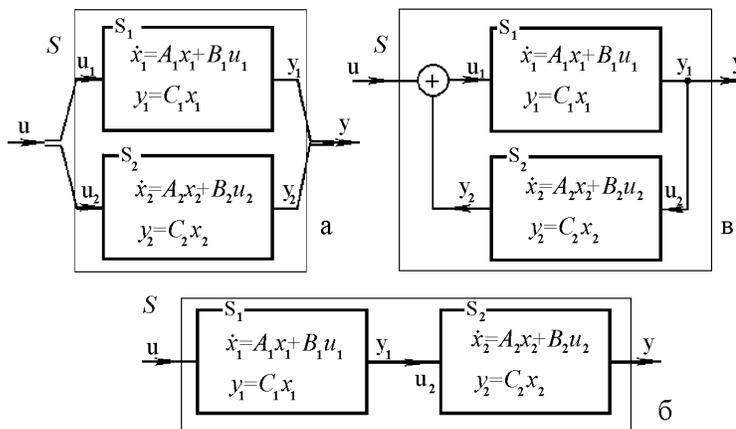


Рис. 1.13. Структуры композитивных систем.

Пусть системы  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ , описываются уравнениями состояния

$$\dot{x}_i(t) = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t), \quad y_i(t) = C_i(t)x_i(t),$$

в которых матрицы  $A_i(t)$ ,  $B_i(t)$ ,  $C_i(t)$  имеют размеры, соответственно,  $n_i \times n_i$ ,  $n_i \times m_i$ ,  $l_i \times n_i$ . Введем совокупные (общие) векторы: состояния  $x(t) \triangleq \text{col}\{x_1(t), x_2(t)\} \in \mathcal{R}^{n_1+n_2}$ , входа  $u(t) \triangleq$

$\text{col}\{u_1(t), u_2(t)\} \in \mathcal{R}^{m_1+m_2}$  и выхода  $y(t) \triangleq \text{col}\{y_1(t), y_2(t)\} \in \mathcal{R}^{l_1+l_2}$ . Объединив уравнения системы в одно, убеждаемся, что относительно введенных переменных это уравнение имеет вид (1.3)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C(t)x(t),$$

в котором матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  имеют следующую блочную структуру:

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & \mathbf{0}_{n_1 \times m_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times m_1} & B_2(t) \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) & \mathbf{0}_{l_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{l_2 \times n_1} & C_2(t) \end{bmatrix}.$$

### 1.7.2. Последовательное соединение

Пусть теперь входом системы  $S$  является вход подсистемы  $S_1$ ,  $u(t) \equiv u_1(t)$ ; выход системы образуется выходом подсистемы  $S_2$ ,  $y(t) \equiv y_2(t)$  и выход первой подсистемы  $S_1$  поступает на вход подсистемы  $S_2$  так, что их размерности совпадают,  $l_1 = m_2$  и  $u_2(t) = y_1(t)$ . Перепишем уравнения подсистем с учетом указанной связи между ними (рис. 1.13, б). Получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) + B_1(t)u(t), & y_1(t) = C_1(t)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t) + B_2(t)C_1(t)x_1(t), & y(t) = C_2(t)x_2(t), \end{cases}$$

откуда получаем матрицы уравнений в форме (1.3) вида

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ B_2(t)C_1(t) & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ \mathbf{0}_{n_1 \times m_2} \end{bmatrix},$$

$$C(t) = [\mathbf{0}_{l_2 \times n_1} \quad C_2(t)].$$

### 1.7.3. Соединение с обратной связью

Пусть теперь подсистемы соединены с обратной связью, т.е. выход подсистемы  $S_2$  суммируется (или вычитается) со входом всей системы  $S$  и поступает на вход подсистемы  $S_1$ . В качестве выхода системы  $S$  используем выход подсистемы  $S_2$  (рис. 1.13, в). Таким образом, мы считаем, что  $m_1 = l_2$ ,  $m_2 = l_1$ ,  $m = m_1$ ,  $l = l_2$ ,  $n = n_1 + n_2$ ,  $u_1(t) = u(t) \pm y_2(t)$ ,

$u_2(t) = y_1(t)$ . С учетом связи между подсистемами их уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) \pm B_1(t)C_2(t)x_2(t) + B_1(t)u(t), & y(t) = C_1(t)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t) + B_2(t)C_1(t)x_1(t), \end{cases}$$

и матрицы в (1.3) определяются выражениями

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & \pm B_1(t)C_2(t) \\ B_2(t)C_1(t) & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ \mathbf{0}_{n_1 \times m_2} \end{bmatrix},$$

$$C(t) = [C_1(t), \quad \mathbf{0}_{l_1 \times n_2}].$$

Аналогичным образом могут быть получены уравнения состояния при последовательном соединении, а также в других, более сложных случаях. Отметим, что хотя изложение этого параграфа касалось непрерывных систем, все полученные выше соотношения справедливы (после очевидных изменений в обозначениях) и для дискретных систем.

### 1.8. Преобразование базиса

Как отмечено в п. 1.1. с. 15, вектор состояния может быть представлен неединственным образом – произвольное взаимно-однозначное отображение пространства состояний  $X$  в себя дает новый вектор, который также можно использовать в качестве состояния системы. Этот вектор имеет другие значения компонент. Особенно распространено линейное невырожденное преобразование с квадратной  $n \times n$ -матрицей  $T$ ,  $\det T \neq 0$ . При таком преобразовании говорят, что вектор состояния представлен *в новом базисе*, а соответствующее преобразование уравнений называют *преобразованием базиса уравнений состояния*. Вид уравнений системы при этом изменяется, но остаются неизменными входо-выходные соотношения. В частности, для стационарных линейных систем остается неизменной передаточная функция. Рассмотрим преобразование базиса более подробно.

Пусть  $T$  – невырожденная матрица порядка  $n$ ,  $\det T \neq 0$ ,  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния системы. Определим вектор  $\tilde{x}(t) \triangleq Tx(t)$ . В силу невырожденности матрицы преобразования  $T$ , вектор  $\tilde{x}(t)$  определяется по  $x(t)$  взаимно-однозначно и

можно записать  $x(t) = T^{-1}\tilde{x}(t)$ .<sup>17</sup> Перепишем уравнения состояния (1.2) в преобразованном виде. Учитывая что  $\dot{x}(t) = T^{-1}\dot{\tilde{x}}(t)$ , получим

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= TA(t)T^{-1}\tilde{x}(t) + TB(t)u(t), & \tilde{x}(t_0) &= \tilde{x}_0 = Tx_0, \\ y(t) &= C(t)T^{-1}\tilde{x}(t) + D(t)u(t),\end{aligned}\quad (1.43)$$

Обозначим матрицы  $\tilde{A}(t) \triangleq TA(t)T^{-1}$ ,  $\tilde{B}(t) \triangleq TB(t)$ ,  $\tilde{C}(t) \triangleq C(t)T^{-1}$ . Отсюда получаем уравнения (1.43) в форме (1.2):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t), & \tilde{x}(t_0) &= \tilde{x}_0 = Tx_0, \\ y(t) &= \tilde{C}(t)\tilde{x}(t) + D(t)u(t).\end{aligned}\quad (1.44)$$

Уравнения (1.44) представляют собой уравнения состояния системы (1.2) в новом базисе. Очевидно, что различных форм уравнений состояния может быть записано неограниченно много.<sup>18</sup>

Рассмотрим теперь стационарные реализуемые системы, заданные уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (1.45)$$

В результате преобразования с матрицей  $T$  получим

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t), \quad (1.46)$$

где матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  определены выше. Вычислим передаточную функцию системы (1.46) по формуле (1.25) и выполним преобразования:<sup>19</sup>

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{W}}(s) &= \tilde{C}(s\mathbf{I}_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D = CT^{-1}(s\mathbf{I}_n - TAT^{-1})^{-1}TB + D = \\ &= C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}T + D \equiv \mathbf{W}(s).\end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция системы после *преобразования подобия* с матрицей  $T$  не изменилась. Говорят,

---

<sup>17</sup> В литературе иногда используют преобразование  $\tilde{x}(t) \triangleq T^{-1}x(t)$ . При таком преобразовании в последующих формулах надо вместо матрицы  $T$  использовать  $T^{-1}$  (и наоборот).

<sup>18</sup> Здесь не рассмотрено преобразование с переменной во времени матрицей  $T = T(t)$ . Матрица  $\tilde{A}(t)$  при таком преобразовании принимает вид  $\tilde{A}(t) = (\dot{T}(t) + T(t)A(t))T^{-1}(t)$ .

<sup>19</sup> Используются тождества  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ,  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , справедливые для квадратных невырожденных матриц.

что передаточная функция инвариантна по отношению к преобразованию базиса уравнений состояния. Заметим, что изменение базиса уравнений состояния соответствует структурным преобразованиям систем, заданных передаточными функциями.

Матрицы  $A$  и  $\tilde{A} = TAT^{-1}$  называются *подобными*. У них много общих свойств. В частности, их характеристические многочлены совпадают:  $\det(s\mathbf{I}_n - A) \equiv \det(s\mathbf{I}_n - \tilde{A})$ , следовательно, совпадают и собственные числа. Обратное, вообще говоря, не верно. Например, матрицы  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  и  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  имеют одинаковые собственные числа  $s_{1,2} = 0$ , но не являются подобными.

Аналогично тому как по координатам вектора состояния в новом базисе можно однозначно получить его координаты в исходном базисе, можно по матрице  $\tilde{A}$  восстановить матрицу  $A = T^{-1}\tilde{A}T$ .

Следует иметь в виду, что хотя преобразование подобия не изменяет передаточной функции, обратное, вообще говоря, не верно. Можно привести примеры, когда одной и той же передаточной функции отвечают уравнения состояния, которые не преобразуются друг в друга ни при какой невырожденной матрице  $T$ . Это явление связано с возможной вырожденностью системы и обсуждается ниже, в главе 7. с.166.

**Пример. Преобразование уравнений ИСЗ.** Пусть исходные уравнения системы (1.15) (п. 1.4.2. с. 28) заданы в виде (1.3) и матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ J_x^{-1} \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0].$$

Зададим матрицу  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , ( $\det T = 1$ ). Выполним с этой матрицей преобразование базиса рассматриваемой системы. Получим

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} J_x^{-1} \\ J_x^{-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [1, -1].$$

В "развернутом" виде (относительно отдельных компонент вектора состояния) в результате преобразования получаем

уравнения

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t) + J_x^{-1}u(t), & y(t) = \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t), \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = J_x^{-1}u(t). \end{cases} \quad (1.47)$$

Как видно, уравнения состояния (1.47) отличаются от исходных (1.15), однако при соответствующих начальных условиях данные системы будут иметь одинаковые реакции на входное воздействие – их передаточные функции совпадают. Заметим также, что не всегда компонентам вектора состояния удается приписать определенный физический смысл. Если компоненты вектора  $x(t)$  в исходном базисе сопоставлялись с фазовыми координатами – углом и угловой скоростью, то после преобразования трудно дать физическую интерпретацию полученным переменным состояния. Структурные схемы, соответствующие исходным (1.15) и преобразованным (1.47) уравнениям состояния, приведены на рис. 1.14

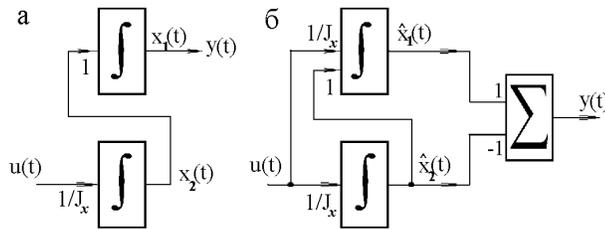


Рис. 1.14. Структурные схемы систем (1.15) (а) и (1.47) (б).

Рассмотренный пример показывает, что значения переменных состояния могут соответствовать значениям некоторых физических переменных, но могут и представлять собой некоторые абстрактные величины. В этой связи возникает вопрос о размерностях переменных, входящих в уравнения состояния. По-видимому, более удобно считать эти величины безразмерными (вещественными) числами. При составлении математической модели системы и определении ее параметров, а также начальных условий, физическая размерность учитывается. Далее модель подвергается исследованиям (которые могут включать и операции преобразования базиса), имеющим абстрактный характер. Для интерпретации полученных результатов в терминах исходной задачи выполняется обратное преобразование.

## 1.9. Задачи и упражнения

1. Имеются четыре часовых устройства, показывающих время  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), которые работают следующим образом [174].

Настенные часы опаздывают каждый час на четыре минуты. Настольные часы опережают настенные часы на две минуты в час. Будильник отстает от настольных часов на две минуты в час. Наконец, наручные часы опережают будильник на две минуты в час.

а) Записать уравнения состояния, соответствующие приведенным утверждениям, в пространстве  $x \in \mathcal{X} = \mathcal{R}^4$  в виде

$$Ex[k+1] = Rx[k] + r, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

с некоторыми матрицами  $E, R$  и вектором  $r$ , полагая время дискретным с интервалом квантования в один час.

б) Привести уравнения состояния к стандартному виду

$$x[k+1] = Ax[k] + g.$$

У к а з а н и е . Учсть, что

$$(\mathbf{I}_n - B)^{-1} = \mathbf{I} + B + B^2 + \dots + B^k + \dots$$

для любой матрицы  $B$  такой, что ряд в правой части сходится.

в) Пусть в полночь (в момент  $k = 0$ ) все часы установлены правильно. Написать общую формулу для  $x[k]$ . Что покажут наручные часы в 7.00 утра (т.е. при  $k = 7$ )?

2. Решить предыдущую задачу при следующем описании хода часов.

Настенные часы опаздывают каждый час на две минуты. Настольные часы опережают настенные часы на две минуты в каждый час, который регистрируют настенные часы. Будильник отстает от настольных часов на две минуты в каждый час, регистрируемый настольными часами. Наручные часы опережают будильник на две минуты в час, регистрируемый будильником.

Имеется нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t)^3 - u(t)x_2(t). \end{cases}$$

а) Пусть  $x_1(1) = 1$ ,  $x_2(1) = -1$  и входное воздействие  $u(t) \equiv 0$ . Найти  $x(t)$ . (У к а з а н и е . Рассмотреть степени  $t$ ).

б) Используя процедуру линеаризации (см. п. 1.3.), найти уравнения нестационарной линейной модели, описывающей поведение рассматриваемой системы при малых отклонениях от полученного решения.

в) Найти приближенное решение исходного уравнения при  $x_1(1) = 1.5$ ,  $x_2(1) = 0.5$ ,  $u(t) \equiv 0.5$ .

4. Исходные уравнения системы могут не иметь стандартного вида. Более общей формой (1.5) является *обобщенное уравнение состояния* [174]

$$Ex[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (1.48)$$

с  $n \times n$ -матрицами  $A, E$  и  $n \times m$ -матрицей  $B$ , которое называется также *уравнением в дескрипторной форме*. Если  $\det E = 0$ , данная система содержит статические и динамические соотношения, в некотором смысле статические уравнения "встроены" в динамическую модель. При достаточно общих условиях данная система может быть приведена к уравнениям, порядок которых меньше порядка исходной системы. Рассмотрим следующую задачу.

Пусть система описывается уравнениями

$$\begin{bmatrix} T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x[k+1] = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} u[k] \\ v[k] \end{bmatrix},$$

где  $x[k] \in \mathcal{R}^n$ ,  $T, C$  –  $m \times n$ -матрицы,  $D$  – матрица размера  $(n - m) \times n$ ,  $u[k] \in \mathcal{R}^m$ ,  $v[k] \in \mathcal{R}^{n-m}$ .

Предполагая невырожденность  $n \times n$ -матрицы  $\begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix}$ , выполнить следующие преобразования для приведения системы к стандартному виду (1.5):

а) Ввести вектор  $\tilde{x} \triangleq Tx$  и, используя данное определение и нижний блок уравнений системы, записать  $x[k]$  как

$$x[k] = H\tilde{x}[k] - Gv[k].$$

Привести явное выражение для  $G$  и  $H$ .

б) Показать, что верхний блок исходной системы может быть записан уравнениями состояния вида

$$\tilde{x}[k+1] = R\tilde{x}[k] + Bv[k] + u[k].$$

Получить выражения для  $R$  и  $B$ . (Заметим, что  $x[k]$  можно восстановить по  $\tilde{x}[k]$ , используя пункт а)

5. Самуэльсоном [174, 188] предложена следующая модель национальной экономики. *Национальный доход*  $Y[k]$  равен сумме *потребления*  $C[k]$ , *инвестиций*  $I[k]$  и *правительственных расходов*  $G[k]$ . Потребление пропорционально национальному доходу за предыдущий год, а инвестиции пропорциональны росту расходов на потребление между данным годом и предыдущим. Эти предположения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} Y[k] &= C[k] + I[k] + G[k], \\ C[k+1] &= mY[k], \\ I[k+1] &= \mu(C[k+1] - C[k]), \end{aligned}$$

или к уравнениям в матричной форме (1.48) с матрицами

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\mu & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и вектором состояния  $x \triangleq \text{col}\{I, C, Y\}$ .

Используя результат упражнения 4, привести данные уравнения к стандартным разностным уравнениям вида (1.5) второго порядка.

6. Уравнения углового движения искусственного спутника Земли при действии управляющего момента относительно главных осей инерции задаются уравнениями Эйлера ([19, 23, 94], см. также с. 28) и имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x(t) = -\frac{J_z - J_y}{J_x} \omega_y \omega_z + \frac{M_x(t)}{J_x}, \\ \dot{\omega}_y(t) = -\frac{J_x - J_z}{J_y} \omega_z \omega_x + \frac{M_y(t)}{J_y}, \\ \dot{\omega}_z(t) = -\frac{J_y - J_x}{J_z} \omega_x \omega_y + \frac{M_z(t)}{J_z}, \end{cases}$$

где  $J_i, M_i, \omega_i$  ( $i = x, y, z$ ) – соответственно составляющие момента инерции, управляющего момента и угловой скорости относительно осей связанной системы координат  $(x, y, z)$ .

Полагая  $J_y = J_z = J$ , получить опорную траекторию движения ИСЗ при  $M_i(t) \equiv 0$  ( $i = x, y, z$ ).

Выполнить линеаризацию уравнений движения спутника относительно данной траектории.

## 2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Ввиду того, что имеется множество эквивалентных (с точки зрения входо-выходных соотношений) способов представления уравнений состояния системы, можно выбрать из них "наилучшие" – наиболее удобные для использования в рассматриваемой задаче. Такие формы записи уравнений называются *каноническими*. Поскольку может быть много различных приложений, известно и много канонических форм. Рассмотрим некоторые, наиболее распространенные из них. Основное внимание будет уделяться системам с одним входом и выходом.

### 2.1. Диагональная и жорданова формы

Пусть собственные числа матрицы  $A$  в (1.3) заданы и равны  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим следующие случаи.

#### 2.1.1. Простые вещественные собственные числа

Пусть  $s_i$  – простые, т.е.  $s_i \neq s_j$  при  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  и, кроме того, они вещественные:  $\text{Im}s_i = 0$ . В этом случае<sup>1</sup> любую матрицу  $n \times n$  можно привести с помощью некоторого невырожденного преобразования к диагональной матрице  $A = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  [53, 115] или, более подробно, к матрице вида

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_n \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Как нетрудно убедиться, множество  $\{s_i\}$  действительно образует спектр матрицы (2.1). Для этого найдем характери-

---

<sup>1</sup>Следует иметь в виду, что отсутствие кратных собственных чисел является достаточным, а не необходимым условием возможности преобразования матрицы к виду (2.1) или (2.4). При выполнении некоторых условий такое преобразование выполнимо и при наличии кратных собственных чисел. Более подробно этот вопрос обсуждается в следующем п. 2.1.3. и в литературе по теории матриц (см., например, [53, 66, 115]).

ческую матрицу  $s\mathbf{I}_n - A$ , которая тоже оказывается диагональной,  $s\mathbf{I}_n - A = \text{diag}\{s - s_i\}$ . Характеристический многочлен есть определитель данной матрицы, а для диагональной матрицы он равен произведению элементов главной диагонали [53]. Следовательно, получаем  $A(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$ , откуда непосредственно следует высказанное утверждение.

Такой базис удобен тем, что в нем уравнения системы распадаются на уравнения  $n$  независимых подсистем первого порядка. Предполагая для простоты записи, что  $u(t) \in \mathcal{R}$  ( $m = 1$ ), приведем соответствующие уравнения состояния "в развернутом виде", т.е. в виде системы уравнений первого порядка относительно компонентов вектора  $x$ . Получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = s_1 x_1(t) + b_1 u(t), \\ \dot{x}_2(t) = s_2 x_2(t) + b_2 u(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = s_n x_n(t) + b_n u(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Видно, что здесь  $x_i(t)$  не зависят от  $x_j(t)$  (при  $i \neq j$ ). Следовательно, происходит декомпозиция системы – система высокого ( $n$ -го) порядка распадается на  $n$  независимых подсистем меньшего (первого) порядка. Вследствие этого упрощается расчет процессов в системе.

Посмотрим, какая структура системы соответствует такой форме матрицы  $A$  с точки зрения передаточных функций. Пусть  $l = m = 1$  – система имеет один вход и один выход,  $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ ,  $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ . Из (2.2) сразу получаем, что передаточные функции к  $x_i$  определяются выражениями  $W_i(s) = \frac{b_i}{s - s_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Учитывая уравнение выхода  $y(t) = Cx(t) \equiv \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$ , получим, что передаточная функция всей системы имеет вид

$$W(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - s_i}, \quad \text{где } K_i = c_i b_i.$$

Таким образом, диагональная форма матрицы  $A$  соответствует системе, состоящей из параллельно соединенных подсистем первого порядка (апериодических или интегрирующих звеньев).

### 2.1.2. Простые мнимые собственные числа

Более сложным случаем является наличие у матрицы  $A$  вещественных корней.<sup>2</sup> Как и выше, при простых собственных числах, матрица  $A$  также может быть приведена невырожденным преобразованием к диагональному виду (2.1), однако такая матрица будет содержать на диагонали мнимые элементы. Это неудобно для дальнейшего ее использования. Для устранения указанной трудности используется *квазидиагональная (блочно-диагональная) форма* [53, 115]. При таком представлении мнимым корням  $s_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  характеристического многочлена соответствуют блоки (*клетки*) вида

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Характеристический многочлен данной матрицы  $A_i(s) = (s - \alpha_i)^2 + \beta_i^2 = s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2$ . Корни этого многочлена  $s_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  совпадают с заданными. Окончательно матрица  $A$  имеет следующую блочную структуру (определенную с точностью до порядка следования блоков):

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{s}_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & \alpha_r & \beta_r & \\ 0 & \dots & & & 0 & -\beta_r & \alpha_r & \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Вещественным корням  $s_1, \dots, s_q$  характеристического многочлена соответствуют блоки размера  $1 \times 1$ , мнимым корням  $s_{q+2i-1, q+2i} = \alpha_i \pm j\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  соответствуют блоки размера  $2 \times 2$  вида (2.3).

<sup>2</sup> Поскольку рассматриваются уравнения с вещественными коэффициентами, мнимые корни характеристического многочлена будут комплексно-сопряженными,  $s_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  ( $j^2 = -1$ ),  $\alpha_i = \text{Re}s_{i,i+1}$ ,  $\beta_i = |\text{Im}s_{i,i+1}|$ .

Вычисляя характеристический многочлен матрицы (2.4), аналогично п. 2.1.1. с. 67, получим

$$\det(s\mathbf{I}_n - A) = \prod_{i=1}^q (s - s_i) \prod_{j=1}^r (s^2 - 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2).$$

Таким образом, матрица  $A$  имеет заданные собственные числа  $s_j$ . Если снова записать уравнения состояния для каждой компоненты вектора  $x$ , то убеждаемся, что система "распадается" на  $q + r$  независимых подсистем первого и второго порядков. При  $m = l = 1$  передаточная функция системы принимает вид

$$W(s) = \sum_{i=1}^{q+r} W_i(s), \quad \text{где} \quad (2.5)$$

$$W_i(s) = \begin{cases} \frac{K_i}{s - s_i}, & i = 1, \dots, q, \\ \frac{d_j' s + d_j}{s^2 - 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2}, & j = i - q, \quad i = q + 1, \dots, q + r. \end{cases}$$

Следовательно, такой форме уравнений состояния соответствует разложение передаточной функции системы на слагаемые первого и второго порядков, что иллюстрируется рис. 2.1.<sup>3</sup>

Рассмотренные выше канонические формы матрицы  $A$  (2.1) и (2.4) представляют собой частные случаи так называемой *вещественной формы Жордана*. Такая форма может быть получена, если характеристический многочлен матрицы  $A$  не имеет кратных корней. Ниже приведен общий вид вещественной жордановой формы при наличии у матрицы  $A$  кратных собственных чисел (см. сноску 1 на с. 67).

---

<sup>3</sup> Здесь (и далее в книге) структурные схемы линейных систем содержат представление уравнений звеньев (подсистем) в виде их передаточных функций. Иногда, чтобы подчеркнуть отличие между реальными процессами и их изображениями в комплексной области [76, 95, 66], на структурных схемах используют специальные обозначения для *операторов дифференцирования и сдвига вперед* [76]. Мы этого делать не будем, рассматривая передаточную функцию просто как компактную форму записи соответствующих уравнений.

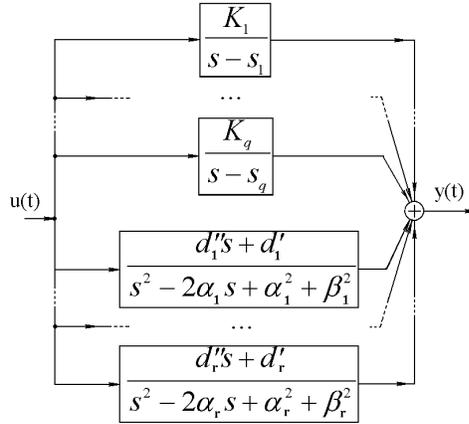


Рис. 2.1. Структурная схема, соответствующая жордановой форме (2.4).

### 2.1.3. Общий случай. Вещественная форма Жордана

Пусть матрица  $A$  порядка  $n$  имеет кратные собственные числа:  $s_1$  – кратности  $l_1$ ,  $s_2$  – кратности  $l_2$ , ...,  $s_p$  – кратности  $l_p$ . Выполнено условие  $\sum_{i=1}^p l_i = n$ . При наличии кратных корней не всякая матрица может быть невырожденным преобразованием приведена к диагональной или блочно-диагональной форме (2.1), (2.4). Однако известен более общий блочно-диагональный канонический вид матрицы  $A$ , который может быть получен и для кратных собственных чисел при любой исходной матрице [53, 66, 115]. В этой форме матрица  $A$  имеет следующую блочную структуру: <sup>4</sup>

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_r \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{J}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  – клетки (ящички) Жордана, имеющие вид:

<sup>4</sup> В этом случае также говорят, что матрица  $A$  представлена в собственном базисе.

– для вещественных собственных чисел ( $\text{Im}s_j = 0$ )

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} s_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & s_j & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & s_j \end{bmatrix}; \quad (2.7)$$

– для мнимых собственных чисел  $s_j = \alpha_j \pm j\beta_j$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_j & \alpha_j & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j & \beta_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_j & \alpha_j & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & \alpha_j & \beta_j \\ 0 & & \dots & & 0 & -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Блочно-диагональная форма матрицы  $A$  вида (2.6) называется *вещественной (обобщенной) жордановой матрицей*. Из теории матриц (см. [53, 115]) известна следующая теорема.

**Теорема.** Всякая квадратная матрица над полем вещественных чисел подобна некоторой обобщенной жордановой матрице, которая определяется однозначно с точностью до порядка расположения клеток на главной диагонали.  $\square$

Размер каждой клетки  $\mathbf{J}_i$  вида (2.7) может быть от  $1 \times 1$  до  $l_j \times l_j$ , а размеры клеток  $\mathbf{J}_i$  вида (2.8) – от  $2 \times 2$  до  $2l_j \times 2l_j$ , (где  $j$  – кратность корня  $s_j$ ). Следовательно, в случае простых корней клетки, отвечающие вещественным собственным числам имеют порядок один:  $\mathbf{J}_i = s_i$ , а клетки, отвечающие мнимым собственным числам – порядок два:  $\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ . Таким образом, приведенная в п. 2.1.2. с. 69, форма (2.4) следует из (2.6) как частный случай.

Существенно, что размер клеток Жордана в общем случае не совпадает с кратностью корня. Одному и тому же значению  $s_i$  может отвечать несколько клеток разного размера. Например, выше, в п. 1.8. с. 60, были рассмотрены матрицы  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  и  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , которые имеют одинаковые наборы собственных чисел  $s_{1,2} = 0$ . Обе матрицы

записаны в канонической жордановой форме, но матрица  $A_1$  совпадает с клеткой  $2 \times 2$ , а матрица  $A_2$  содержит две клетки  $J_1 = J_2 = 0$  размера  $1 \times 1$ . Как отмечено выше, данные матрицы не могут быть преобразованы одна к другой никаким невырожденным преобразованием, т.е. они не являются подобными. В этом проявляется общее свойство матриц, согласно которому каноническая форма Жордана определяется единственным образом с точностью до порядка следования клеток [53, 115].

Вычисление передаточной функции системы с одним входом и одним выходом, представленной уравнениями с матрицей (2.6), дает следующий результат. Передаточная функция  $W(s)$ , как и для случая простых собственных чисел, имеет вид (2.5), где соответствующие слагаемые равны

$$W_i(s) = \begin{cases} \frac{B_i(s)}{(s - s_i)^{l_i}}, & \text{— для вещественных} \\ & \text{собственных чисел;} \\ \frac{D_i(s)}{(s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2)^{l_i}}, & \text{— для мнимых} \\ & \text{собственных чисел,} \end{cases} \quad (2.9)$$

в которых многочлены  $B_i(s)$ ,  $D_j(s)$  имеют степени  $l_i - 1$  и  $2l_j - 1$  соответственно.

Алгоритм определения размеров клеток Жордана для матриц с кратными собственными числами связан с выполнением следующих действий [53, 115]:

- составление характеристической матрицы  $s\mathbf{I}_n - A$  и приведение ее к каноническому виду;
- вычисление элементарных делителей матрицы  $s\mathbf{I}_n - A$ ;
- построение клеток Жордана по каждому элементарному делителю.

Этот процесс достаточно трудоемок и здесь не рассматривается. Более подробные сведения о жордановой форме содержатся в [53, 66, 115].

## 2.2. Управляемое каноническое представление

Рассмотрим другую каноническую форму – *управляемое каноническое представление (УКП)* [3], которая иногда называется также канонической формой “с общим выходом”, канонической формой *фазовой переменной* [47, 102] либо *управляемой формой Луенбергера* [1, 174].<sup>5</sup>

Запишем матрицу  $A$  в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторые коэффициенты.<sup>6</sup> Вычислим ее характеристический многочлен. Как нетрудно убедиться,  $A(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n$ . Таким образом, коэффициенты характеристического многочлена располагаются в последней строке матрицы  $A$ . Матрицы такого вида называются *сопровождающими для своего характеристического многочлена*, или *матрицами Фробениуса*.<sup>7</sup> Данные матрицы обладают рядом интересных свойств (см. [53, 115] и п. 3.2.1. с. 84). В частности, коэффициенты характеристического многочлена таких матриц определяются без вычислений.

Матрица  $B$  для данной канонической формы также имеет специальный вид. Остановимся на частном случае систем со скалярным входным воздействием  $u(t) \in \mathcal{R}$ , т.е.  $m = 1$ .<sup>8</sup>

Для таких систем матрица  $B$  имеет размер  $n \times 1$  и может рассматриваться как вектор-столбец. В данной канонической форме выполнено равенство

$$B = [0, \dots, 0, 1]^T. \quad (2.11)$$

<sup>5</sup> В отличие от формы Жордана для этой канонической формы в литературе встречаются разные названия.

<sup>6</sup> Такое представление выполнимо не всегда, см. п. 3.2. с. 84.

<sup>7</sup> Иногда используют более компактную запись  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\mathbf{a}^T & 1 \end{bmatrix}$ .

<sup>8</sup> Мы здесь не рассматриваем форму УКП для систем с векторным входным процессом. В последнем случае матрица  $A$  может иметь более общий вид, чем (2.10), см. [1, 3, 174]. Аналогичное замечание относится и к рассмотренной в следующем параграфе форме НКП при векторном выходе.

Следовательно, уравнения состояния системы в данной канонической форме имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + u(t), \\ \begin{cases} y_1(t) = c_{1,1} x_1(t) + c_{1,2} x_2(t) + \dots + c_{1,n} x_n(t), \\ \vdots \\ y_l(t) = c_{l,1} x_1(t) + c_{l,2} x_2(t) + \dots + c_{l,n} x_n(t), \end{cases} \end{cases} \quad (2.12)$$

где через  $c_{i,j}$  обозначены элементы  $l \times n$ -матрицы  $C$ , вид которой не оговаривается. Видно, что переменные состояния системы (2.12) связаны друг с другом как последовательные производные.<sup>9</sup> Такая форма уравнений обычно используется в математике при приведении дифференциального уравнения  $n$ -го порядка к системе уравнений первого порядка, т.е. к так называемой *нормальной форме Коши* [66]. Структурная схема системы с одним выходом, уравнения которой имеют вид (2.12), показана на рис. 2.2.

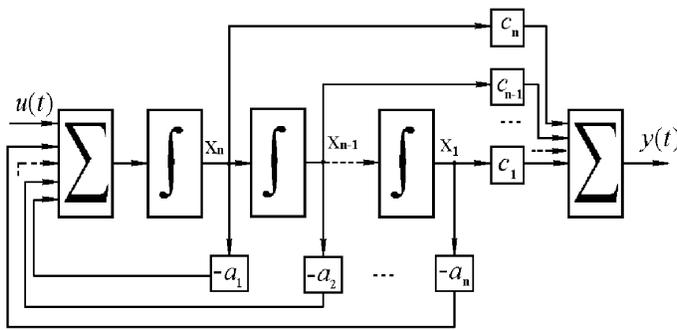


Рис. 2.2. Структурная схема системы (2.12) (форма УКП).

Получим передаточную функцию системы (2.12), считая для простоты записи, что  $l = 1$ ,  $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ . Непосред-

<sup>9</sup> Заметим, что переменные состояния  $x_j$  являются последовательными производными от выхода  $y_i(t)$  только в том случае, когда все элементы  $i$ -й строки матрицы  $C$ , начиная с  $c_{i,2}$ , равны нулю.

ственное вычисление по формуле (1.25) приводит к выражению

$$W(s) = \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \triangleq \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (2.13)$$

Таким образом, в данной канонической форме как коэффициенты знаменателя  $A(s)$ , так и коэффициенты числителя  $B(s)$  передаточной функции находятся без вычислений. Они получаются непосредственно из элементов последней строки матрицы  $A$  и соответствующей  $i$ -му выходу строки матрицы  $C$ .

Аналогичные формы уравнений состояния могут быть записаны и для систем с несколькими входами, см. [3, 1, 174].

Надо отметить, что не всякую систему можно привести преобразованием подобия к виду (2.10), (2.11). Условия осуществимости такого перехода обсуждаются ниже, в п.п. 3.2. 7.2.

### 2.3. Наблюдаемое каноническое представление

Рассмотрим теперь так называемое *наблюдаемое каноническое представление (НКП)*, или каноническую форму "с общим входом". Ограничимся системами со скалярным выходом,  $y(t) \in \mathcal{R}$ ,  $l = 1$  (т.е. SISO- и MISO-системами). Пусть матрица  $A$ , как в и предыдущем случае, имеет форму матрицы Фробениуса (2.10), матрица  $B$  имеет произвольный вид, а  $1 \times n$ -матрица

$$C = [1, 0, \dots, 0, 0]. \quad (2.14)$$

Уравнения состояния тогда принимают форму

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + b_{1,1}u_1(t) + \dots + b_{1,m}u_m(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + b_{2,1}u_1(t) + \dots + b_{2,m}u_m(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) + b_{n-1,1}u_1(t) + \dots + b_{n-1,m}u_m(t), \\ \dot{x}_n(t) &= -a_n x_1(t) - a_{n-1}x_2(t) \dots - a_1 x_n(t) + \\ &+ b_{n,1}u_1(t) + \dots + b_{n,m}u_m(t), \end{cases} \quad (2.15)$$

$$y(t) = x_1(t),$$

где через  $b_{ij}$  обозначены элементы  $n \times m$ -матрицы  $B$ . Структурная схема системы с одним входом, уравнения которой имеют вид (2.15), показана на рис. 2.3. Коэффициенты знаме-

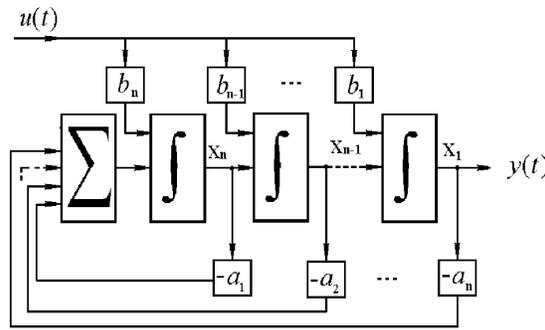


Рис. 2.3. Структурная схема системы (2.15) (форма НКП).

нателя  $A(s)$  передаточной функции системы (2.15) также определяются непосредственно из последней строки матрицы  $A$ . Числитель  $B(s)$  вычисляется сложнее.

Как и уравнения вида УКП, НКП могут быть записаны и для МИМО-систем. Заметим, что не всякая система может быть приведена к данному виду (см. ниже п.п. 3.2. 7.3.).

Рассмотренные здесь канонические формы далеко не исчерпывают используемых в разных приложениях форм уравнений состояния. Например, применяется также *идентификационное каноническое представление (ИКП)*, или *наблюдаемая форма Луенбергера* [1, 3, 174], при котором матрица  $A$  является транспонированной матрицей Фробениуса, а  $C = [0, \dots, 0, 1]$ . Ниже, в главе 7. с. 166, будут приведены также *каноническая форма управляемости* и *каноническая форма наблюдаемости* [3, 47].

## 2.4. Задачи и упражнения

1. Вычислить характеристические многочлены, собственные значения и собственные векторы матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

Матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

привести к канонической форме Жордана.

3. Доказать, что любая квадратная матрица  $A$  подобна своей транспонированной  $A^T$  [3].

4. Доказать, что для любой вещественной  $n \times n$ -матрицы  $A$  существует невырожденная матрица  $T$  такая, что матрица  $\tilde{A} \triangleq TAT^{-1}$  имеет *треугольную форму*. На главной диагонали этой матрицы расположены ее собственные значения  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , а элементы, находящиеся под главной диагональю, равны нулю [3].

5. Показать, что для любой квадратной матрицы  $A$  и любого  $\varepsilon > 0$  всегда имеется возмущение элементов матрицы  $A$  на величину, меньшую, чем  $\varepsilon$ , такое, что результирующая матрица подобна диагональной (2.1) [174].

6. Пусть население страны делится на две части: *сельское* и *городское*. Естественный прирост населения, вызванный рождением, предполагаем одинаковым для обоих секторов с параметром  $\alpha$  (так что численность населения в год  $k + 1$  в  $\alpha$  раз отличается от численности в год  $k$ ). Численность населения в секторах подвержена изменениям из-за миграции между ними. Пусть оптимальное количество сельского населения составляет часть  $\gamma$  от всего населения страны. Годовой уровень миграции сельского населения в города пропорционален избытку его численности по отношению к оптимальной. Скорость миграции определяется множителем  $\beta > 0$ . (Предполагаем  $\beta < \alpha$ .) Множитель  $0 < \gamma \leq 1$  зависит от уровня сельскохозяйственного производства. Указанные параметры обычно изменяются во времени, здесь считаем их постоянными [174].

Обозначим численность сельских и городских жителей в год с номером  $k$  через  $r[k]$  и  $u[k]$  соответственно. На основе указанных предположений получаем следующую модель процесса миграции:

$$\begin{cases} r[k+1] = \alpha r[k] - \beta(r[k] - \gamma(r[k] + u[k])), \\ u[k+1] = \alpha u[k] + \beta(r[k] - \gamma(r[k] + u[k])). \end{cases} \quad (2.16)$$

а. Записать уравнения (2.16) в матричной форме (1.5) относительно вектора состояния  $x \triangleq \text{col}\{r, u\}$ .

б. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$  системы (2.16).

в. Показать, что условие

$$0 \leq \beta \leq \min\left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\alpha}{\bar{\gamma}}\right)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы как городское, так и сельское население имело неотрицательную численность при произвольных неотрицательных начальных значениях. Показать, что это эквивалентно условию  $0 \leq \beta \leq 2\alpha$ .

7. Модифицируем модель упр. 6, введя население *пригородов* численностью  $s[k]$ , которая подчинена уравнению  $s[k+1] = \alpha s[k] + \delta u[k]$ . Считаем, что значение  $\delta u[k]$  получается за счет городского населения [174].

Записать уравнения трехсекторной модели населения, найти для этой модели собственные значения и собственные векторы, дать интерпретацию полученным результатам.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Обратимся теперь к задаче перехода от исходных уравнений состояния к уравнениям в заданной канонической форме. Решение этой задачи сводится к определению невырожденной  $n \times n$ -матрицы  $T$  такой, что для заданных матриц  $A, B, C$  получаются уравнения с матрицами  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{C} = CT^{-1}$ , имеющими требуемый канонический вид.<sup>1</sup>

Заметим, что столбцы матрицы  $T^{-1}$  содержат координаты новых базисных векторов относительно старого базиса [3, 53, 66, 115]. Это означает, что если в пространстве  $\mathcal{R}^n$  заданы две системы базисных векторов<sup>2</sup>  $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  и  $\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , то каждый вектор  $\mathbf{f}_i$  базиса  $\{\mathbf{f}\}$  можно разложить по базису  $\{\mathbf{e}\}$ , т.е. представить в виде суммы  $\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} \mathbf{e}_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , или, в матричных обозначениях,  $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]P$ ,  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n]P^{-1}$  и  $T = P^{-1}$ .

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении матрицы преобразования  $T$  по заданным матрицам данной системы, записанным в разных базисах.

Если заданы  $n \times n$ -матрицы  $A$  и  $\tilde{A}$ , то из условия  $\tilde{A} = TAT^{-1}$  матрица преобразования  $T$  должна удовлетворять матричному уравнению

$$TA = \tilde{A}T \quad \text{при условии} \quad \det T \neq 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) приводится к однородной системе  $n^2$  линейных уравнений. Сведения о существовании ее решений содержатся, например, в [53]. Как отмечено выше, не всякие матрицы с одинаковым спектром являются подобными. Поэтому не каждая матрица может быть приведена к заданной канонической форме. Возможность такого преобразования к соответствующим каноническим формам обсуждается ниже.

<sup>1</sup> При приведении к канонической форме задан вид одной, или двух матриц (например, матрицы  $\tilde{A}$  или пары  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ), а остальные матрицы находятся через матрицу  $T$  путем указанных преобразований

<sup>2</sup> Напомним, что *базисом*  $n$ -мерного линейного пространства называется (любая) упорядоченная система  $n$  линейно независимых векторов из этого пространства [3, 53].

### 3.1. Преобразование уравнений состояния к диагональной и блочно-диагональной формам

При определении диагональной (в общем случае – вещественной жордановой) канонической формы уравнений состояния системы задается только вид матрицы  $\tilde{A}$ . Матрицы  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  получаются через найденную ”диагонализирующую” матрицу  $T$  по формулам  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{C} = CT^{-1}$ . Поэтому нас интересует задача определения матрицы  $T$  такой, что выполнено  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ , причем матрица  $\tilde{A}$  имеет вид, указанный в п. 2.1. с. 67. Естественным требованием является совпадение характеристических многочленов матриц  $A$  и  $\tilde{A}$ . Считая его выполненным, построим матрицу  $\tilde{A}$  заданного канонического вида, как описано в 2.1.. Затем матрица преобразования  $T$  вычисляется из уравнения (3.1) либо исходя из указанного свойства преобразования базисных векторов. Уточним применение данной схемы решения для случая простых собственных чисел матрицы  $A$ . Рассмотрим вначале систему, для которой все собственные числа  $s_i$  матрицы  $A$  простые и вещественные.

#### 3.1.1. Простые вещественные собственные числа

При решении этой задачи обычно используются собственные векторы матриц. Напомним, что *собственным вектором* некоторой  $n \times n$ -матрицы  $A$ , *отвечающим собственному значению*  $s_i$  называется такой вектор  $x_i^0 \neq 0$ , для которого выполнено равенство [53, 115]

$$Ax_i^0 = s_i x_i^0. \quad (3.2)$$

Таким образом, собственный вектор – это ненулевой вектор, который при линейном преобразовании с матрицей  $A$  остается коллинеарным самому себе. Очевидно, что собственные векторы определяются с точностью до произвольного ненулевого множителя, т.е. если  $x_i^0$  – собственный вектор и  $\lambda \neq 0$ , то  $\lambda x_i^0$  также является собственным вектором матрицы  $A$ . Поэтому каждый вещественный собственный вектор определяет некоторое *собственное направление*, или *собственную прямую* в пространстве  $\mathcal{R}^n$ .<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Нетрудно заметить, что мнимым собственным числам матрицы  $A$  с вещественными элементами отвечают собственные векторы, имеющие

Пусть вещественная матрица  $\tilde{A}$  имеет диагональную форму  $\tilde{A} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $\text{Im}s_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Подставляя ее в выражение (3.2) и учитывая, что диагональные элементы матрицы  $\tilde{A}$  совпадают с собственными значениями, находим, что единичные векторы  $\tilde{x}_i^0 = \mathbf{e}_i \triangleq [0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0]^T$  являются собственными векторами  $\tilde{x}_i^0$  данной матрицы. Собственными направлениями, таким образом, здесь являются оси ортогональной системы координат. Нетрудно убедиться, что при простых собственных числах матрицы  $\tilde{A}$  других собственных векторов нет. Покажем, что матрица приведения  $T$  к диагональной канонической форме (2.4) при простых вещественных собственных числах определяется из выражения

$$T = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^{-1}, \quad (3.3)$$

где  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – собственные векторы матрицы  $A$ .

Действительно, пусть  $s_i$  – собственные числа, а  $x_i^0$  – собственные векторы  $n \times n$ -матрицы  $A$ , т.е.  $Ax_i^0 = s_i x_i^0$ ,  $x_i^0 \neq 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Пусть также известно, что данная матрица связана некоторым соотношением подобия с диагональной, т.е. выполнено  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\det T \neq 0$ ,  $\tilde{A} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Образует *модальную матрицу*  $P \triangleq [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ . Объединяя записанные выше выражения для собственных векторов в одно матричное соотношение, получаем  $AP = P\tilde{A}$ . Отсюда при линейной независимости  $x_i^0$  получим  $\tilde{A} = P^{-1}AP$ , следовательно,  $T = P^{-1}$ , что непосредственно дает выражение (3.3).

**З а м е ч а н и е .** Здесь не обсуждался вопрос о линейной независимости собственных векторов  $\{x_i^0\}$ , что, очевидно, необходимо для существования матрицы  $T$  вида (3.3). Как известно [53, 115], при простых собственных числах  $s_i$  матрицы  $A$  это условие выполнено, а именно данный случай и рассматривается в настоящем параграфе.

### 3.1.2. Простые мнимые собственные числа

Рассмотрим теперь более общий случай приведения уравнений состояния системы к блочно-диагональному виду (2.4).

---

мнимые компоненты. Случай мнимых собственных чисел будет рассмотрен в следующем параграфе.

Считаем, что все корни характеристического многочлена матрицы  $A$  попарно различны, но среди них имеются комплексно-сопряженные  $s_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ , ( $j^2 = -1$ ),  $\alpha_i = \operatorname{Re}s_{i,i+1}$ ,  $\beta_i = |\operatorname{Im}s_{i,i+1}|$ . В этом случае матрица  $A$  также имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов и изложенный в п. 3.1.1. с. 81, алгоритм применим. Однако полученная в результате такого преобразования диагональная матрица  $\tilde{A} = \operatorname{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , как и матрица преобразования  $T$ , будет содержать мнимые элементы, что вызывает трудности при их последующем использовании. Поэтому рассмотрим алгоритм, позволяющий получить вещественную блочно-диагональную форму вида (2.4) [47, 79].

Пусть имеются собственные значения  $s_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ , которым отвечают собственные векторы  $x_i^0, x_{i+1}^0$ . Можно показать [79, 115], что всегда есть множитель  $\lambda \in \mathcal{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  такой, что  $x_i^0, \lambda x_{i+1}^0$  – комплексно-сопряженные. Поэтому будем считать, что выполнено условие  $x_{i+1}^0 = \operatorname{conj}(x_i^0)$ , где  $\operatorname{conj}(\cdot)$  – операция комплексного сопряжения. Определим теперь векторы  $h_i, h_{i+1}$  формулами

$$h_i = \frac{1}{2}(x_i^0 + x_{i+1}^0), \quad h_{i+1} = \frac{1}{2j}(x_i^0 - x_{i+1}^0). \quad (3.4)$$

Векторы  $h_i, h_{i+1}$  по построению вещественные и, если все собственные числа простые, линейно независимы между собой и с другими собственными векторами. Эти векторы определяют в пространстве  $\mathcal{R}^n$  некоторую *собственную плоскость* – инвариантное подпространство матрицы  $A$  размерности два.<sup>4</sup>

Построим теперь матрицу преобразования

$$T = [x_1^0, x_2^0, \dots, h_j, h_{j+1}, \dots, h_{q+r-1}, h_{q+r}]^{-1},$$

где вектор-столбцы  $x_i^0$  отвечают вещественным, а  $h_j, h_{j+1}$  – мнимым собственным значениям  $s_{j,j+1} = \alpha_j \pm j\beta_j$ . Преобразование  $\tilde{A} = TAT^{-1}$  с найденной таким образом матрицей  $T$

<sup>4</sup> Напомним, что *инвариантным подпространством* относительно линейного оператора  $\mathcal{A}$ , выраженного матрицей  $A$  (не обязательно квадратной), называется множество  $\mathcal{X}^A \subseteq \mathcal{X}$  такое, что из  $x \in \mathcal{X}^A$  следует  $Ax \in \mathcal{X}^A$  [115]. Тривиальными инвариантными подпространствами являются  $\mathcal{X}^A = \{0\}$  и все пространство  $\mathcal{X}$ . Собственные прямые представляют собой нетривиальные инвариантные подпространства единичной размерности.

приводит уравнения системы к вещественной блочно-диагональной форме (2.4), в которой порядок следования блоков соответствует порядку расположения столбцов  $x_i^0, h_j$  у матрицы  $P = T^{-1}$ .

Приведение уравнений состояния к вещественной жордановой форме при наличии кратных собственных чисел здесь не рассматривается. Заметим, однако, что если вид матрицы Жордана (2.6) определен, то для вычисления матрицы  $T$  можно непосредственно использовать формулу (3.1). Для кратных вещественных собственных чисел формулы вычисления  $T$  в явном виде приведены, например, в [47].

Заметим, что если матрица  $A$  в исходных уравнениях состояния имеет вид матрицы Фробениуса (2.10), что соответствует формам УКП и НКП, собственные векторы определяются достаточно просто. Непосредственной подстановкой можно установить, что такая матрица имеет собственные векторы  $x_i^0 = [1, s_i, s_i^2, \dots, s_i^{n-1}]^T$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Если собственные числа простые, то полученная система векторов линейно независима и определяет матрицу  $T$  перехода к диагональной, или блочно-диагональной, форме.

### 3.2. Преобразование уравнений состояния к управляемой и наблюдаемой каноническим формам

#### 3.2.1. О возможности преобразования матрицы к форме Фробениуса

В канонических формах УКП и НКП (см. п.п. 2.2. 2.3.) матрица  $A$  должна иметь вид матрицы Фробениуса (2.10). Кроме того, в форме УКП задается вид матрицы  $B$ , а в форме НКП – матрицы  $C$ .

Заметим прежде всего, что не для всякой матрицы имеется преобразование подобия к виду (2.10). Как известно [53, 115], для матрицы вида (2.10) характеристический многочлен  $\Lambda(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A)$  совпадает с ее минимальным многочленом.<sup>5</sup> Верно также и обратное: каждая матрица, у кото-

<sup>5</sup> Напомним следующие определения [53]. Скалярный многочлен  $f(s)$  называется *аннулирующим многочленом* для квадратной матрицы  $A$ , если  $f(A) = 0$ . Заметим, что характеристический многочлен  $\Lambda(s)$ , по теореме Кэли–Гамильтона, является и аннулирующим многочленом. Матрица может иметь аннулирующие многочлены, отличные от характеристического.

рой приведенный характеристический многочлен совпадает с минимальным, может быть приведена к виду матрицы Фробениуса. Например, поскольку это выполнено для матриц с простыми собственными числами, то каждая такая матрица может быть приведена невырожденным преобразованием к виду (2.10).

Возможность приведения матрицы к виду (2.10) в общем случае зависит от размера клеток жордановой формы (2.6). Если размер каждой клетки совпадает с кратностью соответствующего вещественного собственного значения или равен удвоенной кратности мнимых (комплексно-сопряженных) собственных значений, то такая матрица может быть приведена и к виду (2.10) [115]. В противном случае такая возможность отсутствует.

**З а м е ч а н и е .** Помимо жордановой формы матрицы  $A$ , известна и другая блочно-диагональная форма (*первая естественная нормальная форма* [53, 115]), в которой матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{L}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  – блоки вида (2.10). Подобно канонической форме Жордана, данная форма может быть получена для любой матрицы  $A$ .

Предполагая возможным преобразование матрицы  $A$  к виду (2.10), рассмотрим алгоритмы приведения уравнений состояния к формам УКП и НКП.

---

*Минимальным многочленом  $\chi(s)$  матрицы  $A$  называется приведенный аннулирующий многочлен для  $A$  наименьшей степени. Очевидно, что степень минимального многочлена  $\deg \chi(s) \leq n$ . При  $\deg \chi(s) = n$  минимальный многочлен совпадает с характеристическим. Такая ситуация имеет место прежде всего, если все собственные числа матрицы  $A$  простые. Минимальный многочлен  $\chi(s)$  можно вычислить из соотношения [53]:  $A(s) = \chi(s)d(s)$ , где  $A(s)$  – приведенный характеристический многочлен ( $A(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A)$ ), а  $d(s)$  – наибольший общий делитель элементов присоединенной для  $s\mathbf{I}_n - A$  матрицы  $\text{adj}(s\mathbf{I}_n - A)^T$ .*

### 3.2.2. Управляемое каноническое представление

Как и в п. 2.2. с. 74, остановимся на системах с одним входом –  $u(t) \in \mathcal{R}$ . Прежде чем перейти непосредственно к данному преобразованию, рассмотрим несколько более общую задачу.

Пусть даны  $n \times n$ -матрицы  $A$ ,  $\tilde{A}$  и  $n$ -мерные вектор-столбцы  $\mathbf{b}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$ . Требуется найти невырожденную матрицу  $T$  такую, что выполнено

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = T\mathbf{b}, \quad (3.6)$$

т.е. пары матриц  $(A, \mathbf{b})$  и  $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$  отвечают приведенным в п. 1.8. с. 60, соотношениям для преобразования базиса уравнений состояния.<sup>6</sup>

Умножим выражение для  $\tilde{\mathbf{b}}$  в (3.6) слева на матрицу  $\tilde{A}$ . Получим  $\tilde{A}\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{A}T\mathbf{b}$ . Учитывая первую формулу в (3.6) (см. п. 3.1 с. 86), находим, что  $\tilde{A}\tilde{\mathbf{b}} = TAb$ . Снова, умножив полученное выражение на  $\tilde{A}$  и учитывая (3.1), получаем  $\tilde{A}^2\tilde{\mathbf{b}} = TA^2\mathbf{b}$ . Продолжая этот процесс, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} &= T\mathbf{b}, \\ \tilde{A}\tilde{\mathbf{b}} &= TAb, \\ &\dots \\ \tilde{A}^{n-1}\tilde{\mathbf{b}} &= TA^{n-1}\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем  $n \times n$ -матрицы

$$Q \triangleq [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}], \quad \tilde{Q} \triangleq [\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{A}\tilde{\mathbf{b}}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{\mathbf{b}}]. \quad (3.8)$$

С учетом введенных обозначений уравнения (3.7) принимают вид

$$\tilde{Q} = QT.$$

Если выполнены условия:  $\det(s\mathbf{I}_n - A) \equiv \det(s\mathbf{I}_n - \tilde{A})$ ,  $\det Q \neq 0$ ,  $\det \tilde{Q} \neq 0$ , то существует и единственна невырожденная матрица преобразования  $T$ , определяемая выражением

$$T = \tilde{Q}Q^{-1}, \quad (3.9)$$

---

<sup>6</sup> Мы здесь предполагаем, что такая матрица существует. Прежде всего это означает, что матрицы  $A$  и  $\tilde{A}$  имеют одинаковые характеристические многочлены.

при которой матрицы  $A$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$  связаны соотношением (3.6):  
 $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = T\mathbf{b}$ .<sup>7</sup>

Обратимся теперь непосредственно к поставленной задаче преобразования уравнений состояния к форме УКП, ограничиваясь рассмотренными в главе 2.2. с. 74, SISO и SIMO-системами. В данной канонической форме матрица  $A$  должна иметь вид матрицы Фробениуса (2.10), а матрица  $B = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ . Именно в таком виде запишем матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  уравнений состояния в новом базисе. Предварительно следует вычислить коэффициенты  $a_i$  характеристического многочлена  $\Lambda(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n$  исходной матрицы  $A$ . Приравнявая теперь  $\mathbf{b} = B$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{B} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ , найдем матрицы  $Q$ ,  $\tilde{Q}$  по (3.8). Если выполнено  $\det Q \neq 0$ ,  $\det \tilde{Q} \neq 0$ , то преобразование к УКП возможно и его матрица определяется уравнением (3.9). Для вычисления соответствующей матрицы  $\tilde{C}$  используем соотношение  $\tilde{C} = CT^{-1}$ .

**З а м е ч а н и е .** Как нетрудно убедиться непосредственным вычислением, для матриц  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  указанного вида условие  $\det \tilde{Q} \neq 0$  выполнено всегда (вне зависимости от коэффициентов  $a_i$ ). Поэтому требуется проверить только невырожденность матрицы  $Q$  исходной системы. Кроме того, специальный вид матриц  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  позволяет получить достаточно простую формулу для  $\tilde{Q}$  [3, 47].

### 3.2.3. Наблюдаемое каноническое представление

Описанный выше прием можно использовать и для перехода к другим формам уравнений состояния, для которых задан вид матриц  $A$  и  $C$ , например – к описанной в п. 2.3. с. 76, форме НКП. Ограничимся рассмотрением SISO- и MISO-систем ( $y(t) \in \mathcal{R}, l = 1$ ). Предварительно рассмотрим более общую задачу.

Пусть даны  $n \times n$ -матрицы  $A$ ,  $\tilde{A}$  и  $n$ -мерные вектор-строки  $\mathbf{c}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}$ . Требуется найти невырожденную матрицу  $T$  такую, что

<sup>7</sup> Приведенные выше рассуждения относятся к вычислению матрицы преобразования  $T$ , а не к доказательству ее существования. В частности, предполагалось выполненным соотношение (3.1) при некоторой  $T$ ,  $\det T \neq 0$ . Вопрос о существовании матрицы  $T$  связан с рассмотренными ниже в главе 7. с. 166, понятиями управляемости и наблюдаемости систем. Более подробные сведения приведены в [30, 83].

выполнено

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}T^{-1}, \quad (3.10)$$

т.е. пары матриц  $(A, \mathbf{c})$  и  $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{c}})$  отвечают приведенным в п. 1.8. с. 60, соотношениям для преобразования базиса уравнений состояния.<sup>8</sup>

Умножим выражение для  $\tilde{\mathbf{c}}$  в (3.10) справа на матрицу  $\tilde{A}$ . Получим  $\tilde{\mathbf{c}}\tilde{A} = \mathbf{c}AT^{-1}$ . Учитывая первую формулу в (3.10), находим, что  $\tilde{\mathbf{c}}\tilde{A} = \mathbf{c}AT^{-1}$ . Снова умножив полученное выражение на  $\tilde{A}$  и учитывая (3.1), получаем  $\tilde{\mathbf{c}}\tilde{A}^2 = \mathbf{c}A^2T^{-1}$ . Как и в пункте 3.2.2., после ряда итераций, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}} &= \mathbf{c}T^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{c}}\tilde{A} &= \mathbf{c}AT^{-1}, \\ &\dots \\ \tilde{\mathbf{c}}\tilde{A}^{n-1} &= \mathbf{c}A^{n-1}T^{-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Введем  $n \times n$ -матрицы

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}A \\ \vdots \\ \mathbf{c}A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} \\ \tilde{\mathbf{c}}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.11) можно тогда переписать в виде

$$\tilde{Q} = QT^{-1}.$$

При выполнении условий  $\det(s\mathbf{I}_n - A) \equiv \det(s\mathbf{I}_n - \tilde{A})$ ,  $\det Q \neq 0$ ,  $\det \tilde{Q} \neq 0$  существует и единственна невырожденная матрица преобразования

$$T = \tilde{Q}^{-1}Q, \quad (3.13)$$

так что матрицы  $A$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}$  связаны соотношением (3.10).

Рассмотрим теперь непосредственно переход к форме НКП, для SISO-, MISO-систем. В этом базисе матрица  $A$  должна иметь вид матрицы Фробениуса (2.10), а матрица  $C = [1,$

---

<sup>8</sup> Как и выше, мы предполагаем, что матрица  $T$  существует; следовательно, матрицы  $A$  и  $\tilde{A}$  имеют одинаковые характеристические многочлены.

$0, \dots, 0, 0]$ . В таком виде и выберем матрицы  $\tilde{A}, \tilde{C}$  уравнений состояния в новом базисе. Вычислим коэффициенты  $a_i$  характеристического многочлена  $\Lambda(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$  исходной матрицы  $A$ . Приравнявая теперь  $\mathbf{c} = C, \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{C} = [1, 0, \dots, 0, 0]$ , найдем матрицы  $Q, \tilde{Q}$  по (3.12). Если выполнено  $\det Q \neq 0, \det \tilde{Q} \neq 0$ , то преобразование к НКП возможно и его матрица определяется уравнением (3.13). Для вычисления матрицы  $\tilde{B}$  используем соотношение  $\tilde{B} = TB$ .

**З а м е ч а н и е .** Для матриц  $\tilde{A}, \tilde{C}$  указанного вида  $\tilde{Q} = \mathbf{I}_n$ . Поэтому  $\det \tilde{Q} \neq 0$  при любых коэффициентах  $a_i$ . Следовательно, требуется проверить только невырожденность матрицы  $Q$  исходной системы. Кроме того, это упрощает вычисление матрицы преобразования  $T$ , так как из (3.13) получим  $T = Q$ , т.е.  $\tilde{B} = QB$ .

### 3.2.4. Примеры

Рассмотрим некоторые примеры выполнения указанных преобразований.

**Пример 1. Летательный аппарат.** Обратимся к описанному в п. 1.4.2. с. 41, продольному движению летательного аппарата (1.33) с принятыми выше значениями параметров  $a_y^\alpha = -2.10 [c^{-1}]$ ,  $a_{m_z}^\alpha = 29.4 [c^{-2}]$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z} = 2.18 [c^{-1}]$ ,  $a_{m_z}^{\delta_b} = 60.7 [c^{-2}]$ . Считая входом системы отклонение рулей высоты, а выходом – угол тангажа, получим следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -2.1 & 0 & 2.1 \\ 29.4 & -2.18 & -29.4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -60.7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0, 0, 1]. \quad (3.14)$$

Выполним сначала преобразование к диагональной форме матрицы  $A$ . Вычисляя характеристический многочлен, собственные числа  $s_i$  и собственные векторы  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получим

$$\det(s\mathbf{I}_n - A) = s^3 + 4.28s^2 + 34s, \quad s_1 = 0, \quad s_{2,3} = -2.14 \pm 5.42j,$$

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{bmatrix}, \quad x_2^0 = \begin{bmatrix} 0.0525 - 0.039j \\ -0.952 + 0.247j \\ 0.10 + 0.014j \end{bmatrix}, \quad x_3^0 = \begin{bmatrix} 0.0525 + 0.039j \\ -0.952 - 0.247j \\ 0.10 - 0.014j \end{bmatrix}.$$

Так как имеются мнимые собственные числа, вещественная матрица  $\tilde{A}$  должна иметь блочно-диагональный вид (2.4), ал-

горитм приведения к которому описан в п. 3.1.2. с. 82. Согласно этому алгоритму, по формуле (3.4) получим векторы  $h_2 = [0.0525, -0.952, 0.10]^T$ ,  $h_3 = [-0.039, 0.247, 0.136]^T$ . Вычислим матрицу преобразования

$$T = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.0525 & -0.039 \\ 0 & -0.952 & 0.247 \\ 0.707 & 0.10 & 0.136 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.22 & 0.0874 & 0.190 \\ -1.38 & -0.982 & 1.38 \\ -5.34 & 0.262 & 5.34 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.14 & 5.42 \\ 0 & -5.42 & -2.14 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -5.30 \\ 59.6 \\ -15.9 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [0.707 \quad 0.01 \quad 0.136].$$

Найденные матрицы соответствуют разложению передаточной функции ЛА по углу тангажа (1.36) на с. 42 в виде (2.5)

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s), \quad W_1(s) = \frac{-3.75}{s}, \quad W_2(s) = \frac{3.75s - 44.6}{s^2 + 4.28s + 34.0}.$$

Преобразование к базису УКП приводит к следующим значениям:<sup>9</sup>

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -127 \\ -60.7 & 132 & 1.50 \cdot 10^3 \\ 0 & -60.7 & 132 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4.28 \\ 1 & -4.28 & 15.6 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -7.84 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.0165 & 0 & -0.0165 \\ -0.0346 & -0.0165 & 0.0346 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -34.0 & -4.28 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [-127 \quad -60.7 \quad 0].$$

---

<sup>9</sup> Заметим, впрочем, что при известной передаточной функции приведенные ниже выкладки можно не делать, а записать матрицы уравнений состояния непосредственно по соотношению (2.13), с. 76. Поэтому здесь основной интерес может представлять матрица  $T$ , позволяющая связать "физический" базис переменных состояния с каноническим.

Преобразование к виду НКП получается следующим образом. Матрица  $Q$  в (3.13) имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 29.4 & -2.18 & -29.4 \end{bmatrix}, \quad \text{откуда} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60.7 \\ 132 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\tilde{A}$  совпадает с приведенной выше матрицей вида УКП, матрица  $\tilde{C} = [1, 0, 0]$ .

MATLAB-программа для преобразования уравнений состояния летательного аппарата к каноническим формам <sup>10</sup>

```
[v,r]=eig(A);
- вычисление собственных векторов  $x_i^0$  (функцией eig помещаются в матрицу v) и собственных значений  $s_i$  (помещаются в массив r);
h1=1/2*(v(:,2)+v(:,3)); h2=1/2*(v(:,2)-v(:,3))/j;
- "овеществление" собственных векторов по (3.4);
Pd=[v(:,1),h1,h2]; Td=inv(Pd);
- вычисление модальной матрицы Pd и матрицы преобразования Td согласно (3.3);
Ad=Td*A*Pd; Bd=Td*B; Cd=C*Pd;
- преобразование к блочно-диагональному виду по формулам  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{C} = CT^{-1}$ 
Ad1=Ad(1,1); Bd1=Bd(1,1); Cd1=Cd(1,1); Dd1=0;
Ad2=Ad(2:3,2:3); Bd2=Bd(2:3,1);
Cd2=Cd(1,2:3); Dd2=0;
- получение уравнений состояния подсистем разбиением матриц на блоки первого и второго порядков;
[nd1,dd1]=ss2tf(Ad1,Bd1,Cd1,Dd1,1)
[nd2,dd2]=ss2tf(Ad2,Bd2,Cd2,Dd2,1)
- вычисление передаточных функций  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  разложения (2.5).
a=poly(A); % - вычисление коэффициентов характеристического многочлена;
Af=[zeros(2,1),eye(2);-a(4:-1:2)]; Bc=[0 0 1]';
```

<sup>10</sup> Начало программы, в котором заданы значения параметров и сформированы матрицы уравнений состояния, содержится в примере 2 п. 1.6.4. с. 53.

- формирование матриц  $\tilde{A}, \tilde{B}$  вида УКП;
- $Q_c = [B, A^*B, A^2*B]$ ;
- $Q_{c-} = [Bc, Af^*Bc, Af^2*Bc]$ ;
- формирование матриц управляемости  $Q_c, \tilde{Q}_c$ ;
- $Tc = Q_{c-}/Q_c$ ;
- вычисление матрицы преобразования  $T$  по формуле (3.9);
- $Ac = Tc^*A/Tc$ ;  $Bc = Tc^*B$ ;  $Cc = C/Tc$ ;
- преобразование к виду УКП (интерес представляет матрица  $Cc$ , матрицы  $Ac, Bc$  вычисляются для контроля);
- $Co_- = [1 \ 0 \ 0]$ ; % – формирование матрицы  $\tilde{C}$  вида НКП;
- $Qo = [C; C^*A; C^*A^2]$ ;
- $Qo_- = [Co_-; Co_-*Af; Co_-*Af^2]$ ;
- формирование матриц наблюдаемости  $Q_o, \tilde{Q}_o$ ;
- $Po = Qo_-/Qo$ ;  $To = inv(Po)$ ;
- вычисление матрицы преобразования  $T$  по формуле (3.13);
- $Ao = To^*A^*Po$ ;  $Bo = To^*B$ ;  $Co = C^*Po$ ;
- преобразование к виду НКП.

**Пример 2. Обращенный маятник на подвижной платформе.** Рассмотрим теперь приведенные в п. 1.4.3. на с. 31 линеаризованные уравнения расположенного на тележке перевернутого маятника (1.18). Используем следующие значения параметров [47]:  $\frac{k}{M} = 1$  [с<sup>-1</sup>],  $M = 1$  [кг],  $L' = 0.842$  [м]. Выходом системы будем считать угол отклонения маятника от вертикальной оси. Тогда матрица  $C = [-\frac{1}{L'}, 0, \frac{1}{L'}, 0]$ .<sup>11</sup> Снова начнем с рассмотрения перехода к диагональной форме. Собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$  в данном примере равны:  $s_{1,2} = \pm 3.41$ ,  $s_3 = 0$ ,  $s_4 = -1$ ,

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.281 \\ 0.960 \end{bmatrix}, x_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.281 \\ 0.960 \end{bmatrix}, x_3^0 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ 0.707 \\ 0 \end{bmatrix}, x_4^0 = \begin{bmatrix} -0.477 \\ 0.477 \\ -0.521 \\ 0.521 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$T = \begin{bmatrix} -1.78 & -0.40 & 1.78 & 0.52 \\ 1.78 & -0.74 & -1.78 & 0.52 \\ 1.41 & 1.41 & 0 & 0 \\ 0 & 2.10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

<sup>11</sup> Чтобы проверить данное утверждение, следует рассмотреть, как переменные состояния в (1.18) связаны с физическими переменными.

$\tilde{B} = [-0.40, -0.74, 1.4, 2.1]^T$ , а матрица  $\tilde{C} = [0.33, -0.33, 0, -0.053]$ . Следовательно, получаем представление передаточной функции системы в виде

$$W(s) = -\frac{0.133}{s-3.41} + \frac{0.243}{s+3.41} - \frac{0.111}{s+1}.$$

Заметим, порядок полученной передаточной функции ниже порядка исходной системы. Это связано в данном случае с наличием нулевого коэффициента матрицы  $\tilde{C}$ . Поэтому движения, соответствующие собственному числу  $s_3 = 0$  не будут влиять на выход системы. В этом проявляется отсутствие *полной наблюдаемости* рассматриваемой системы по данному выходу. Подробно свойства наблюдаемости и управляемости систем будут рассмотрены ниже (в главе 7. с. 166.). Сейчас заметим, что в данном примере физически это связано с тем, что по измерениям угла поворота маятника положение тележки восстановить однозначно нельзя (а лишь с точностью до начального отклонения).

Получим теперь уравнения состояния маятника в форме УКП. Характеристический многочлен системы имеет вид

$$\det(s\mathbf{I}_n - A) = s^4 + s^3 - 11.6s^2 - 11.6s.$$

Матрицы

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11.6 & 11.6 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -16.5 \\ 0 & 0 & -16.5 & 16.5 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 12.6 \\ 1 & -1 & -12.6 & -12.6 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.086 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.086 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$\tilde{C} = CT^{-1} = [0, 0, -1.18, 0]$ . Полученные матрицы соответствуют передаточной функции, которая после сокращения совпадающих нулей и полюсов имеет вид

$$W(s) = \frac{-1.18s}{s^3 + s^2 - 11.6s - 11.6}. \quad (3.15)$$

Как видим, данная система относится к звеньям дифференцирующего типа, а наличие полюса с положительной вещественной частью говорит о ее неустойчивости.

В главе 7. будет показано, что сократимость передаточной функции, отсутствие равенства между степенью ее знаменателя и размерностью пространства состояний свидетельствуют о *вырожденности* SISO-систем. Для рассматриваемого случая это означает, что данная система не может быть приведена к НКП. Действительно, вычисляя матрицу  $Q$  по (3.12), получим

$$Q = \begin{bmatrix} -1.188 & 0 & 1.188 & 0 \\ 0 & -1.188 & 0 & 1.188 \\ -13.8 & 1.188 & 13.8 & 0 \\ 0 & -15.0 & 0 & 13.8 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}Q = 3, \quad \det Q = 0.$$

По смыслу данной задачи невозможность приведения уравнений системы к виду НКП объясняется упомянутой выше невозможностью восстановить положение тележки по отклонению маятника.

**Пример 3. Транспортная система.** Обратимся теперь к приведенным на с. 32 уравнениям (1.19) транспортного средства с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 m_1^{-1} & 0 & k_2 m_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 m_2^{-1} & 0 & -(k_1 + k_2) m_2^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 m_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Как и выше, примем следующие значения параметров:  $m_1 = 500$  кг,  $m_2 = 400$  кг,  $k_1 = 60$  кН/м,  $k_2 = 170$  кН/м. Покажем приведение уравнений состояния этой системы к формам Жордана и УКП.<sup>12</sup> Получим сначала жорданову форму.

Вычислив собственные числа и собственные векторы матрицы  $A$  при заданных параметрах, получим:  $s_{1,2} = \pm 25.8j$ ,  $s_{3,4} = \pm 5.19j$ ,

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} -0.024 \\ -0.527j \\ 0.033 \\ 0.849j \end{bmatrix}, \quad x_2^0 = \begin{bmatrix} -0.024 \\ 0.527j \\ 0.033 \\ -0.849j \end{bmatrix}, \quad x_3^0 = \begin{bmatrix} 0.182 \\ 0.947j \\ 0.050 \\ 0.259j \end{bmatrix}, \quad x_4^0 = \begin{bmatrix} 0.182 \\ -0.947j \\ 0.050 \\ -0.259j \end{bmatrix}.$$

<sup>12</sup> Приведение к виду НКП, как мы его рассматривали в п. 3.2.3. с. 87, в данном случае неосуществимо, так как выходная величина – векторная.

Следовательно

$$h_1 = \begin{bmatrix} -0.024 \\ 0 \\ 0.033 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.527 \\ 0 \\ 0.849 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0.182 \\ 0 \\ 0.050 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.947 \\ 0 \\ -0.259 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$T = \begin{bmatrix} -7.12 & 0 & 26.0 & 0 \\ 0 & -0.276 & 0 & 1.01 \\ 4.68 & 0 & 2.91 & 0 \\ 0 & 0.903 & 0 & 0.560 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 25.8 & 0 & 0 \\ -25.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.20 \\ 0 & 0 & -5.20 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 428 \\ 0 \\ 238 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -0.020 & 0 & 0.182 & 0 \\ 0.033 & 0 & 0.050 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что полученные матрицы (с учетом матрицы  $D$ ) соответствуют представлению системы в виде параллельно соединенных консервативных звеньев и "прямой связи" (через безынерционное звено). Это означает, что матричная передаточная функция системы может быть представлена в виде

$$\mathbf{W}(s) = -\frac{1}{s^2 + 668} \begin{bmatrix} 225 \\ s^2 + 305 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2 + 26.9} \begin{bmatrix} 225 \\ -s^2 + 34.7 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь преобразование к виду УКП. Определив коэффициенты характеристического многочлена матрицы  $A$ , построим  $\tilde{A}$  в виде матрицы Фробениуса

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.8 \cdot 10^4 & 0 & -695 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы управляемости (см. п. 7.) равны

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 14 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 425 & 0 & -24 \cdot 10^4 \\ 425 & 0 & -24 \cdot 10^4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -695 \\ 1 & 0 & -695 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выполнив преобразование с матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 7 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ -8.3 \cdot 10^4 & 0 & 2.35 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -8.3 \cdot 10^{-4} & 0 & 2.35 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

получим матрицу

$$C = \begin{bmatrix} 1.44 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 5.1 \cdot 10^4 & 0 & 425 & 0 \end{bmatrix}.$$

В Приложении на с. 435 приведена MATLAB-программа **ss2df**, которая реализует описанный в п. 3.1.2. алгоритм преобразования уравнений состояния к вещественной жордановой форме при отсутствии кратных собственных чисел.

В следующей главе мы обратимся к задаче определения уравнений состояния по передаточной функции. Эта задача обратна к рассмотренной в п. 1.5.

### 3.3. Задачи и упражнения

1. Даны уравнения состояния системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2u(t), \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - x_2(t) + 4x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = -4x_2(t) - x_3(t) + u(t) \\ y(t) = x_2(t) + 3x_3(t). \end{cases}$$

Выполнить преобразования к вещественной жордановой форме, УКП, НКП. Показать структурные схемы исходной и полученных в результате преобразования систем. Убедиться в инвариантности передаточной функции.

**З а м е ч а н и е .** Для решения задачи на ЭВМ можно воспользоваться следующей MATLAB-программой: <sup>13</sup>

```
A=[-2 0 0; 4 -1 4; 0 -4 -1]
B=[2; 0; 1] C=[0 1 3]
[Ad,Bd,Cd,T]=ss2df(A,B,C)
[num,den]=ss2tf(A,B,C,0,1)
[Ac,Bc,Cc,Dc]=tf2cf(num,den)
```

<sup>13</sup> Используются приведенные в Приложении С. процедуры **tf2cf**, **tf2cf**.

$[A_o, B_o, C_o, D_o] = \text{tf2of}(\text{num}, \text{den})$   
 $[A_c, B_c, C_c, D_c] = \text{tf2cf}(\text{num}, \text{den})$   
 $[A_o, B_o, C_o, D_o] = \text{tf2of}(\text{num}, \text{den})$

2. В литературе рассматриваются следующие канонические формы [1, 174]:

а) *Первая управляемая каноническая форма Луенбергера.* Матрица  $A = A_F^T$ , где  $A_F$  – матрица Фробениуса (2.10) с. 74, матрица  $B = [1, 0, \dots, 0]^T$ .

б) *Вторая управляемая каноническая форма Луенбергера* – управляемое каноническое представление (2.12) (см. п. 2.2. с. 75).

в) *Первая наблюдаемая каноническая форма Луенбергера* – наблюдаемое каноническое представление (2.15) (см. п. 2.3. с. 76).

г) *Вторая наблюдаемая каноническая форма Луенбергера.* Матрица  $A = A_F^T$ , матрица  $C = [0, \dots, 0, 1]$ .

Показать, что матрицы  $T$  преобразования к указанным каноническим формам имеют вид: для п. а)  $T = Q^{-1}$ , где  $Q$  – матрица управляемости (3.8), с. 86; для п. б)  $T =$

$$\begin{bmatrix} q_n \\ q_n A \\ \vdots \\ q_n A^{n-1} \end{bmatrix}$$
, где  $q_n$  – последняя строка матрицы управляемости  $Q$  (3.8); для п. в)  $T = Q$ , где  $Q$  – матрица наблюдаемости (3.12) (т.е. доказать утверждение, содержащееся в замечании на с. 89); для п. г)  $T = [s_n \quad s_n A \quad \dots \quad s_n A^{n-1}]$ , где  $s_n$  – последний столбец матрицы  $S = Q^{-1}$ ,  $Q$  – матрица наблюдаемости (3.12).

3. Иногда уравнения динамики системы содержат производные от входа (т.е., на первый взгляд, не являются реализуемыми) только из-за того, что неудачно введен вектор состояния. Привести уравнения (2.16), с. 78, к диагональному виду.

4. Получить аналитическое выражение для модальной матрицы  $P$  с. 82 и матрицы преобразования к диагональной форме (3.3) уравнений обращенного маятника (1.18), с. 31.

5. Привести уравнения состояния системы  $\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 \dot{u}(t)$ ,  $y(t) = Cx(t)$  к стандартному виду (1.45).

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Задача определения уравнений состояния по передаточной функции системы есть, по существу, известная в теории дифференциальных уравнений задача приведения линейных уравнений  $n$ -го порядка к нормальной форме Коши [12, 66, 79]. Некоторое отличие состоит в том, что в теории управления принято рассматривать уравнения, в которые входят производные не только от выхода, но и от входа системы.

Начнем рассмотрение этой задачи с SISO-систем.

Полагаем, что система задана передаточной функцией

$$W(s) = \frac{b_0 s^r + b_1 s^{r-1} + \dots + b_{r-1} s + b_r}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \triangleq \frac{B(s)}{A(s)} \quad (4.1)$$

и является строго реализуемой, т.е.  $r < n$ .<sup>1</sup>

Как было отмечено в 1.8., уравнения состояния по передаточной функции определяются с точностью до произвольного невырожденного преобразования. Поэтому данной передаточной функции соответствует множество различных уравнений состояния и поставленная задача решается неоднозначно. Выбор формы уравнений состояния зависит от того, как они будут использоваться в дальнейшем. Рассмотрим некоторые возможные варианты.

В некоторых приложениях желательно, чтобы значения переменных состояния соответствовали определенным физическим переменным (как в рассмотренных в п. 1.4. примерах). Тогда структура матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в (1.45) оказывается заданной и задача состоит в нахождении некоторых их элементов. Эта задача может быть решена на основе обратного перехода от уравнений состояния к передаточной функции методом неопределенных коэффициентов. Далее рассмотрим ситуацию, в которой физический смысл переменных состояния не имеет значения и выбор вида уравнений состояния происходит из других соображений.

---

<sup>1</sup> При  $r = n$  могут быть получены уравнения состояния вида (1.45), где  $D \neq 0$ . Для  $r > n$  получаются нереализуемые системы, передаточные функции которых приводят к более общим уравнениям (1.2). В данной книге ограничимся рассмотрением реализуемых систем.

Прежде всего, если задана только передаточная функция, естественно искать ее *минимальную реализацию*, т.е. такую форму уравнений состояния, при которой заданная передаточная функция получается при наименьшей размерности пространства  $\mathcal{X}$  (следовательно, – при минимально возможном порядке уравнений (1.45)). Как известно, минимальная реализация соответствует невырожденным (полностью управляемым и полностью наблюдаемым) системам.<sup>2</sup> Для SISO-систем это эквивалентно тому, что по уравнениям состояния получается несократимая передаточная функция, степень знаменателя которой  $\deg A(s)$  совпадает с размерностью вектора состояния. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в числителе и знаменателе заданной передаточной функции отсутствуют явно (структурно) выраженные общие множители. Это условие, впрочем, не исключает того, что передаточная функция задана в общем виде и при определенных сочетаниях параметров найденная реализация не будет минимальной.

Итак, считаем, что степень знаменателя передаточной функции задана и равна  $n$ . Поскольку характеристический многочлен матрицы  $A$  совпадает со знаменателем передаточной функции,<sup>3</sup> а степень характеристического многочлена равна размерности  $\dim \mathcal{X}$  пространства состояний  $\mathcal{X}$ , то искомого уравнения состояния должны быть  $n$ -го порядка:  $x \in \mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ .

Теперь можно использовать одну из приведенных выше канонических форм. Проще всего получаются уравнения состояния в форме УКП.

#### 4.1. Управляемое каноническое представление

Уравнения состояния в форме УКП (2.12) имеют матрицы  $A$ ,  $B$  вида (2.10), (2.11). Запишем эти уравнения явно для

---

<sup>2</sup> Вопросы управляемости и наблюдаемости рассматриваются ниже в главе 7.

<sup>3</sup> Следует обратить внимание на то, что знаменатель в (4.1) является приведенным многочленом.

данной передаточной функции (4.1). Получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + u(t), \end{cases}$$

$$y(t) = b_r x_1(t) + b_{r-1} x_2(t) + \dots + b_0 x_{r+1}(t),$$

или в матричной форме  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$C = [b_r, b_{r-1}, \dots, b_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r-1}].$$

Данную форму нетрудно использовать и для СИМО-систем, у которых передаточная функция  $\mathbf{W}(s)$  размера  $l \times 1$  приведена к виду

$$\mathbf{W}(s) = \frac{1}{A(s)} \begin{bmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \\ \vdots \\ B_l(s) \end{bmatrix},$$

в котором  $A(s)$  указан в (4.1), а многочлены  $B_j(s)$  имеют степени  $r_j < n$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Тогда уравнения состояния имеют вид (4.2), где вместо  $1 \times n$ -матрицы  $C$  используется  $l \times n$ -матрица

$$C = \begin{bmatrix} b_{1,r_1} & b_{1,r_1-1} & \dots & b_{1,0} & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ b_{l,r_l} & b_{l,r_l-1} & \dots & b_{l,0} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 4.2. Наблюдаемое каноническое представление

Рассмотрим теперь приведение передаточной функции к виду НКП (2.15), считая сначала, что  $l = m = 1$ . Поскольку матрица  $A$  в данной канонической форме имеет вид (2.10), то ее элементы, аналогично предыдущему случаю, определяются без

вычислений. Матрица  $B$  при приведении к НКП вычисляется через коэффициенты многочленов  $A(s)$ ,  $B(s)$ . Запишем эту матрицу в виде

$$B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n]^T. \quad (4.3)$$

Элементы  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , этой матрицы вычисляются методом неопределенных коэффициентов. Можно использовать следующую рекуррентную формулу

$$\beta_1 = b_0, \quad \beta_j = \bar{b}_{j-1} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i a_{j-i}, \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $\bar{b}_i$  в (4.4) совпадают с соответствующими коэффициентами  $b_i$  числителя  $B(s)$  для  $i = 0, 1, \dots, r$  и равны нулю при больших значениях индекса.

Запишем соответствующие уравнения состояния в "развернутом" виде. Получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \beta_1 u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + \beta_2 u(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \beta_{n-1} u(t), \\ \dot{x}_n(t) &= -a_n x_1(t) - \dots - a_2 x_{n-1}(t) - a_1 x_n(t) + \beta_n u(t), \end{cases} \quad (4.5)$$

$$y(t) = x_1(t).$$

Нетрудно заметить, что при  $r = 0$ ,  $B(s) = b_0$  уравнения вида УКП и НКП фактически совпадают (разница состоит в том, что коэффициент передачи  $b_0$  для УКП помещается в матрицу выхода  $C = [b_0, 0, \dots, 0]$ , а для НКП – во входную матрицу  $B = [0, \dots, 0, b_0]^T$ ).

Покажем использование этой формы для MISO-систем, у которых передаточная функция  $\mathbf{W}(s)$  размера  $1 \times m$  приведена к виду

$$\mathbf{W}(s) = \frac{1}{A(s)} [B_1(s), B_2(s), \dots, B_m(s)],$$

в котором  $A(s)$  указан в (4.1), а многочлены  $B_j(s)$  имеют степени  $r_j < n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Тогда уравнения состояния имеют вид

(2.15), где вместо  $n \times 1$ -матрицы  $B$  используется  $n \times l$ -матрица

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,m} \\ & & \vdots & \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,m} \end{bmatrix},$$

а коэффициенты  $\beta_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  вычисляются по формуле (4.4) для каждого многочлена  $V_j(s)$ .

Следовательно, если имеется система с одним входом, который "разветвляется" на несколько выходов, целесообразно использовать УКП, а если несколько входных сигналов действуют на систему и выходные реакции суммируются, – форму НКП. Общий случай МИМО-систем является существенно более сложным. Прежде чем обсуждать его, рассмотрим приведение передаточных функций к уравнениям состояния, представленным диагональной (жордановой) формой матрицы  $A$ .

### 4.3. Блочнo-диагональная форма

Рассмотрим SISO-систему, заданную передаточной функцией (4.1). Пусть известны корни характеристического многочлена, которые вначале предполагаем простыми. В этом случае всегда имеется возможность разложить  $W(s)$  на простейшие слагаемые первого и второго порядков, т.е. записать ее в виде (2.5), как  $W(s) = \sum_{i=1}^{q+r} W_i(s)$ , где

$$W_i(s) = \begin{cases} \frac{K_i}{s - s_i}, & i = 1, \dots, q, \\ \frac{d'_j s + d_j}{s^2 - 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2}, & j = i - q, \quad i = q+1, \dots, q+r. \end{cases}$$

Для каждого слагаемого (в произвольно выбранном порядке) заполняются клетки матрицы  $A$ , имеющей вещественную

форму Жордана (2.4)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \dots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{s}_q & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}.$$

Элементы  $n \times 1$ -матрицы  $B$  и  $1 \times n$ -матрицы  $C$  находятся таким образом, чтобы соответствующая данному входу передаточная функция из (2.5) имела заданные коэффициенты числителя.<sup>4</sup> Если  $W_i(s) = \frac{K_i}{s - s_i}$ , то соответствующие элементы должны удовлетворять условию  $b_i c_i = K_i$ . Для блоков второго порядка с передаточной функцией

$$W_j(s) = \frac{d'_j s + d_j}{s^2 - 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2},$$

коэффициенты числителя  $d'_j$ ,  $d_j$  связаны с элементами матриц  $B$ ,  $C$  соотношениями

$$d'_j = c_1 b_1 + c_2 b_2, \quad d_j = c_1 (b_2 \beta_j - b_1 \alpha_j) - c_2 (b_1 \beta_j + b_2 \alpha_j).$$

Эти условия дают возможность выбрать искомые элементы, причем задача также решается неоднозначно. Можно, например, рекомендовать использовать следующие значения:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad c_1 = \frac{\alpha_j d'_j + d_j}{\beta_j}, \quad c_2 = d'.$$

#### 4.4. Жорданова форма

Если передаточная функция системы имеет кратные полюса, ее разложение будет содержать слагаемые, степени знаменателей которых отвечают значениям кратности. Для вещественных корней кратности  $k$  получаются знаменатели  $k$ -й

<sup>4</sup> Здесь учитывается, что при блочно-диагональной форме матрицы  $A$  каждая подсистема может рассматриваться независимо от других.

степени, для мнимых корней – степени  $2k$ . Тогда  $W(s)$  имеет вид (2.5), (2.9). Исходя из найденных при разложении передаточной функции  $W(s)$  слагаемых  $W_i(s)$  указанного вида нетрудно записать матрицу  $A$  в форме Жордана (2.6), в которой вещественным корням соответствуют диагональные блоки вида (2.7), а мнимым – блоки вида (2.8). Элементы матриц  $B$ ,  $C$  можно получить путем обратных вычислений методом неопределенных коэффициентов.

Например, для вещественных корней  $s_{1_j} = s_{2_j} = \dots = s_{k_j}$  (кратности  $k_j$ ) можно представить  $W_j(s)$  в виде

$$W_j(s) = \sum_{i=1}^{k_j} \frac{K_{j_i}}{(s - s_{k_j})^i}.$$

Если выбрать элементы соответствующих строк матрицы  $B$  в виде  $b_1 = b_2 = \dots = b_{k_j-1} = 0$ ,  $b_{k_j} = 1$ , то соответствующие данной клетке элементы матрицы  $C$  определяются равенствами  $c_i = K_{j_i}$ . Другой возможный выбор – положить  $c_1 = 1$ , а остальные элементы подстроки – равными нулю. Тогда значения  $K_{j_i}$ , взятые в обратном порядке, присваиваются элементам  $b_i$ . Явный вид уравнений состояния для вещественных корней характеристического многочлена  $A(s)$  приведен в [94].

**З а м е ч а н и е 1.** Процесс преобразования передаточной функции к блочно-диагональной и жордановой формам существенно более трудоемок, чем преобразования к виду УКП или НКП, так как связан с разложением передаточной функции на слагаемые и, следовательно, с вычислением корней характеристического многочлена.

**З а м е ч а н и е 2.** Приведенные процедуры применимы и к реализуемым системам, у которых  $\deg B(s) = \deg A(s)$ . Для их использования надо сначала преобразовать передаточную функцию, выделив в ней целую часть путем деления многочленов

$$W(s) \equiv \frac{B(s)}{A(s)} = d + \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}.$$

Коэффициент  $d$  образует  $1 \times 1$ -матрицу  $D$  в (1.45), а передаточная функция  $\tilde{W}(s) = \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$  оказывается строго реализуемой и приводится к уравнениям состояния обычным образом. В результате этого преобразования находятся матрицы  $A, B, C$ .

**З а м е ч а н и е 3.** В некоторых задачах удобно получать уравнения состояния не для всей системы (пусть даже разомкнутой), а для отдельных звеньев (подсистем). Например, такая ситуация имеет место, когда система задана в виде структурной схемы. Как правило, переход к уравнениям состояния звеньев оказывается существенно более простым. Для того чтобы получить уравнения состояния всей системы, можно использовать изложенные в п. 1.7. методы определения уравнений состояния для агрегированных систем. Например, при синтезе цифровых фильтров применяется *каскадная реализация*, при которой передаточная функция системы представляется в виде произведения передаточных функций первого и второго порядков. Уравнения состояния для этого случая получаются последовательным применением приведенных в 1.7. формул.

**З а м е ч а н и е 4.** Приведенные выше уравнения рассмотрены для непрерывных систем, однако изложенные в настоящей главе канонические формы и методы получения уравнений состояния по передаточным функциям с очевидным изменением обозначений применимы и к дискретным системам.

В Приложении С. на с. 435, приведены тексты программ приведения уравнений состояния SIMO-систем к виду УКП (программа **tf2cf**) и MISO-систем к виду НКП (программа **tf2of**).

#### 4.5. Случай систем с несколькими входами и выходами

Коснемся вопроса определения минимальной реализации для MIMO-систем, имеющих несколько входов и несколько выходов ( $m > 1$ ,  $l > 1$ ). Задача получения минимальной реализации уравнений состояния для таких систем существенно сложнее рассмотренной выше, поэтому ограничимся некоторыми примерами.<sup>5</sup>

Пример 1. Пусть заданы матричные  $2 \times 2$  передаточные функции

$$\mathbf{W}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 1 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

---

<sup>5</sup> Более подробные сведения о решении этой задачи имеются в работах [1, 88, 174].

Нетрудно установить, что реализацией минимального порядка  $\mathbf{W}_1(s)$  будут уравнения состояния:

$$\dot{x}(t) = u_1(t), \quad y_1(t) = x(t) + u_2(t), \quad y_2(t) = x(t) + u_2(t).$$

Этим уравнениям соответствуют матрицы

$$A_1 = 0, \quad B_1 = [1, 0], \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В свою очередь передаточная функция  $\mathbf{W}_2(s)$  имеет минимальную реализацию вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t), & y_1(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t), & y_2(t) = x_2(t), \end{cases}$$

которой отвечают матрицы

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видим, уравнения состояния существенно отличаются: даже размерности векторов состояния у данных систем оказываются различными. Данный пример показывает, что при переходе к уравнениям состояния для ММО-систем следует учитывать более "тонкие" свойства матричных передаточных функций, а характеристический многочлен матрицы получаемых уравнений состояния необязательно совпадает с многочленом  $A(s)$ , полученным в виде общего кратного знаменателей передаточных функций  $W_{i,j}(s)$ .

Пример 2. [88]. Пусть задана матричная передаточная функция

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.7}{9s+1} & 0 \\ \frac{2.0}{8s+1} & \frac{0.4}{9s+1} \end{bmatrix}.$$

Вычисляя матричные вычеты в полюсах  $s_1 = -\frac{1}{9}$ ,  $s_2 = -\frac{1}{8}$ , получим разложение

$$\mathbf{W}(s) = \frac{1}{9s+1} \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} + \frac{1}{8s+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \frac{1}{9s+1} \mathbf{M}_1 + \frac{1}{8s+1} \mathbf{M}_2.$$

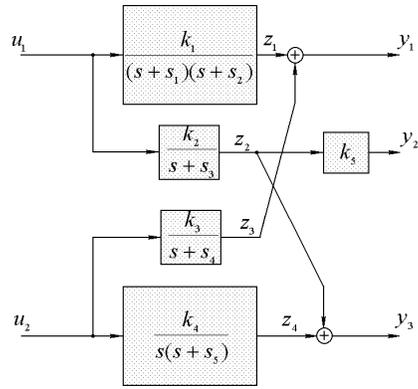


Рис. 4.1. Структурная схема системы для задачи 2.

Размерность пространства состояний минимальной реализации определяется, как сумма рангов матриц  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ . В данном примере

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \text{rank} \mathbf{M}_1 = 2, \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} \mathbf{M}_2 = 1,$$

следовательно  $n = \dim \mathcal{X} = 3$ . Матрицу  $A$  записываем в диагональной форме:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Далее определяем элементы  $3 \times 2$ -матрицы  $B$  и  $2 \times 3$ -матрицы  $C$  так, чтобы получить заданные числители  $\mathbf{W}(s)$ . Нетрудно убедиться, что указанному условию удовлетворяют матрицы

$$B = \begin{bmatrix} \frac{0.7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{0.4}{9} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренный в Примере 2 метод рекомендуется для систем, передаточные функции которых имеют только вещественные простые полюса [88]. В общем случае алгоритмы преобразования к уравнениям состояния сложнее (см., например, [1], а также Приложение 2 в [106]) и здесь не рассматриваются.

#### 4.6. Задачи и упражнения

1. Для системы, заданной передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)},$$

$k = 10c^{-1}$ ,  $\tau_1 = 5c$ ,  $\tau_2 = 0.2c$ ,  $T_1 = 1c$ ,  $T_2 = 5.2c$ , найти матрицы уравнений состояния в форме УКП (2.12), НКП (2.15) и диагональной (2.1). Какие из полученных форм эквивалентны между собой с точностью до выбора базиса переменных состояния?

2. Получить передаточную функцию и уравнения состояния системы со структурной схемой рис. 4.1 [94].

3. Доказать, что при  $r = n$  систему (4.1) можно привести к виду уравнений состояния (1.45), где  $D \neq 0$  (см. сноску 1 на странице 98).

## 5. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Дополнительную наглядную информацию о поведении систем можно получить рассмотрением их фазовых портретов. Дадим основные определения и рассмотрим общие свойства фазовых траекторий применительно к линейным системам. Будем рассматривать *автономные* системы, т.е. такие, в уравнения которых явно не входит время. Таким образом, будем считать, что параметры системы не меняются во времени (система стационарна), а также что входное воздействие отсутствует и рассматривать только собственные движения системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (5.1)$$

### 5.1. Определения и основные свойства фазовых траекторий и фазовых портретов

При построении фазовых траекторий каждому решению ставится в соответствие движение точки по некоторой кривой в пространстве состояний (фазовом пространстве). Это дает возможность получить геометрическую, а точнее – кинематическую [12, 15, 79], интерпретацию поведения системы.

При заданном начальном состоянии  $x_0$  получим решение  $x(t)$  уравнения (5.1). В функции от  $t$  в процессе своего движения точка  $x$  описывает некоторую кривую в пространстве состояний  $\mathcal{X}$ . Эта кривая называется *фазовой траекторией*, или *фазовой кривой* системы (5.1), соответствующей заданным начальным условиям. Поскольку представляет интерес развитие процесса во времени, на фазовой траектории указывается (стрелкой) направление движения изображающей точки при возрастании времени  $t$ .

*Фазовым портретом* системы называется совокупность фазовых траекторий, полученных при различных начальных условиях.

Рассмотрим основные свойства фазовых траекторий и фазовых портретов систем указанного класса. Эти свойства следуют из общих характеристик решений дифференциальных уравнений [12, 79].

Для систем вида (5.1) выполнены условия стандартных теорем существования и единственности решения. Кроме то-

го, они выполнены и для уравнений в "обратном" времени  $\tau \triangleq -t$ . Эти уравнения имеют вид  $dx/d\tau = -Ax(\tau)$ . Отсюда следует, что решения уравнения (5.1) определены в области  $t \in (-\infty, \infty)$ . Свойство стационарности системы приводит к тому, что при построении фазовых траекторий начальный момент не существен – траектории, проходящие через некоторую точку  $x_0$  в различные моменты времени  $t_1, t_2$ , представляют собой одну траекторию.

Поэтому:

- Через каждую точку пространства состояний проходит некоторая фазовая траектория. Следовательно, фазовый портрет системы может быть заполнен фазовыми траекториями сколь угодно плотно.
- Никакая фазовая траектория не имеет точек разветвления, т.е. она не может распадаться на другие траектории.
- Никакие различные траектории не могут иметь точек пересечения. Это свойство следует из единственности решения уравнений в обратном времени. Поэтому для систем указанного вида текущее состояние однозначно определяет как будущее, так и прошлое развитие процесса.

Таким образом, различные фазовые траектории не могут пересекаться. Если у них есть хотя бы одна общая точка, то такие траектории представляют собой участки некоторой одной "более полной" траектории, построенной для более протяженного временного интервала.<sup>1</sup> Коротко говоря, траектории либо не пересекаются, либо совпадают (с точностью до продолжения), или, другими словами, через каждую точку фазового пространства проходит одна и только одна фазовая кривая.

- Самопересекающиеся траектории соответствуют либо *положениям (состояниям) равновесия* системы, и тогда они вырождаются в точку, либо периодическим движениям. В первом случае выполнено, что для всех  $t \in \mathcal{R} : x(t) = x^*$ , где  $x^* \in \mathcal{X}$  не зависит от  $t$ . Во втором случае существует некоторое значение  $T > 0$ , называемое *периодом* такое, что при произвольном  $t$  имеют место равенства  $x(t) = x(t+T)$ , но при

---

<sup>1</sup> Используется понятие *максимальных (непродолжаемых)* траекторий. Соответствующие им решения не могут быть продолжены ни на какой более широкий интервал. Для линейных систем интервалом определения максимальных траекторий является вся вещественная прямая  $\mathcal{R}$ .

$|t_1 - t_2| < T$  хотя бы для одной компоненты  $x_i(t)$  выполнено  $x_i(t_1) \neq x_i(t_2)$ .

Фазовая траектория периодического процесса представляет собой замкнутую кривую, называемую *замкнутой траекторией*, *орбитой* или *циклом*. Само решение  $x(t)$  называется *периодическим с периодом  $T$* .

## 5.2. Поле фазовых скоростей. Классификация особых точек

### 5.2.1. Вектор фазовой скорости

Как отмечено выше, решению  $x(t)$  соответствует движение точки в пространстве  $\mathcal{X}$ . Пусть в момент времени  $t_0$  точка проходит состояние  $x_0$ . Определим векторную скорость точки, описывающей данное решение, в момент ее прохождения через положение  $x_0 : v \triangleq \dot{x}(t)|_{t=t_0}$ . Значение вектора  $v$ , называемого *вектором фазовой скорости* или просто *фазовой скоростью*, зависит не от момента  $t_0$ , а от координат точки, через которую в данный момент проходит траектория. Эта зависимость выражается уравнением (5.1), из которого следует, что для автономных линейных систем вектор фазовой скорости в точке  $x$  определяется равенством

$$v(x) = Ax.$$

Поскольку вектор фазовой скорости показывает векторную скорость решения  $x(t)$ , то, если его изобразить относительно данной точки, получим направление касательной к фазовой траектории, а модуль вектора скорости характеризует темп движения точки вдоль траектории.

Если в каждой точке пространства  $\mathcal{X}$  изобразить соответствующую ей фазовую скорость, получим *поле фазовых скоростей*. Заметим, что для построения поля фазовых скоростей нет необходимости решать дифференциальное уравнение (5.1), так как для каждого  $x$  значение  $v(x) = Ax$ . Поле фазовых скоростей дает наглядное и удобное представление о поведении системы, так как касательные к траекториям позволяют достаточно точно представить и вид самих траек-

торий.<sup>2</sup> В качестве примера на рис. 5.1 показаны поле фазовых скоростей и фазовый портрет системы второго порядка. (Моделировалась рассмотренная в [94] нелинейная система  $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x + 4\text{sat}(x) = 0$ ,  $\text{sat}(\cdot)$  – функция насыщения, см. с. 226).

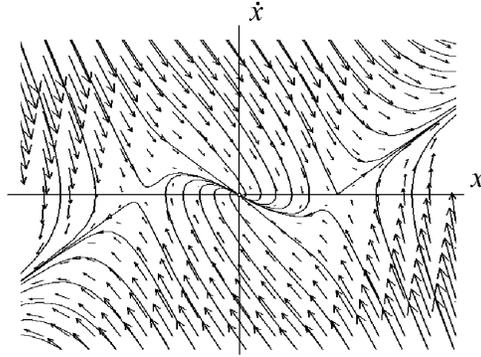


Рис. 5.1. Поле фазовых скоростей.

### 5.2.2. Состояния равновесия системы

В пространстве состояний системы могут быть *особые точки*, в которых вектор фазовой скорости обращается в ноль,  $v(x) = 0$ . Это условие эквивалентно тому, что данные точки представляют собой *состояния (положения) равновесия* системы [12, 79]. Таким образом, если для некоторой  $x_0$  выполнено  $v(x_0) = 0$ , то имеется решение  $x(t) \equiv x_0$ . Справедливо и обратное утверждение – каждому решению  $x(t) \equiv x_0$  соответствует нулевой вектор фазовой скорости в точке  $x_0$ . Как отмечено выше, фазовые траектории в состояниях равновесия вырождаются в точки, а векторы фазовой скорости ”никуда не направлены” (в этом смысле такие точки ”особые”).

Рассмотрим состояния равновесия системы (5.1). Из изложенного ясно, что множество  $\mathcal{X}^0 \triangleq \{x_0\}$  состояний равновесия

<sup>2</sup> На этом свойстве основан так называемый *метод изоклин*, являющийся приближенным графоаналитическим методом построения фазовых портретов нелинейных систем  $\dot{x} = f(x)$  второго порядка. В связи с развитием вычислительных средств к настоящему времени метод изоклин потерял свое значение.

этой системы определяется линейным уравнением

$$Ax_0 = 0, \quad (5.2)$$

где  $A$  –  $n \times n$ -матрица,  $x_0$  –  $n$ -мерный вектор. Как известно из линейной алгебры [53, 66, 115], уравнение (5.2) имеет единственное тривиальное решение  $x_0 = 0$  в том и только том случае, когда матрица  $A$  невырожденная:  $\det A \neq 0$ . Рассмотрим, что это означает с точки зрения свойств динамической системы. Поскольку характеристический многочлен  $\Lambda(s)$ , т.е. знаменатель передаточной функции системы выражается равенством  $\Lambda(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A)$ , находим, что  $\Lambda(0) \equiv a_n = (-1)^n \det A$ . Значит, свободный член характеристического многочлена с точностью до знака совпадает с определителем матрицы  $A$ . Если он не равен нулю, то у системы (5.1) будет единственное нулевое состояние равновесия. Условие  $a_n = 0$  выполняется для звеньев интегрирующего типа. Именно для них возможны ненулевые состояния равновесия. Рассмотрим это подробнее.

Так как для всех  $x_0 \in \mathcal{X}^0$  имеет место равенство  $Ax_0 = 0$ , то  $\mathcal{X}^0$  является нуль-пространством<sup>3</sup> матрицы  $A$ ,  $\mathcal{X}^0 = \mathcal{N}(A)$ . Как известно, [53, 115], пространство  $\mathcal{N}(A)$  является линейным подпространством пространства  $\mathcal{X}$ . Размерность пространства  $\mathcal{N}(A)$  равна разности между размерностью пространства  $\mathcal{X}$  и рангом матрицы  $A$ :  $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{rank} A$ . Таким образом, в зависимости от матрицы  $A$  (точнее, от ее ранга) состояния равновесия линейной системы являются либо точкой  $\{0\}$ , либо прямой, содержащей эту точку, либо плоскостью, проходящей через начало координат, либо линейным подпространством более высокой размерности.

### 5.2.3. Декомпозиция пространства состояний

Выше, в п. 3.1.2. использовалось понятие инвариантных подпространств. Рассмотрим его более подробно.

Напомним следующие положения [53, 115].

**Определение.** Пространство  $\mathcal{X}$  является *прямой суммой* своих подпространств  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_m$  (иногда записывают  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{X}_m$ ), если :

<sup>3</sup> Нуль-пространством (аннулируемым пространством)  $\mathcal{N}(A)$  матрицы  $A$  называется множество  $\{x\}$  такое, что для всех  $x \in \mathcal{N}(A)$  выполнено  $Ax = 0$  [53, 115]. Очевидно, что всегда точка  $\{0\} \in \mathcal{N}(A)$ .

- для всякого  $x \in \mathcal{X}$  существует разложение  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 \in \mathcal{X}_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}_m$ .

- это разложение единственно. (данное условие можно записать в эквивалентной более простой форме, а именно: если  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$ , где  $x_1 \in \mathcal{X}_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}_m$ , то  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ ).  $\square$

Из единственности разложения следует, что всякие подпространства  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$  имеют общим лишь один элемент  $\{0\}$ .

Если матрица  $A$  имеет в пространстве  $\mathcal{X}$  инвариантные подпространства  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ , т.е. для всех  $x \in \mathcal{X}_i$  выполнено  $Ax \in \mathcal{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и если пространство  $\mathcal{X}$  можно представить в виде прямой суммы инвариантных подпространств, то невырожденным преобразованием матрица может быть приведена к блочно-диагональному виду. Справедливо и обратное утверждение: если матрица имеет квазидиагональную (блочно-диагональную) структуру, то пространство  $\mathcal{X}$  разлагается на прямую сумму инвариантных (по отношению к данной матрице) подпространств.

Если аннулирующий многочлен  $f(s)$  (см. 3.2.) матрицы  $A$  разложить в произведение двух взаимно-простых множителей:  $f(s) = f_1(s)f_2(s)$ , то пространство  $\mathcal{X}$  можно разложить в прямую сумму двух подпространств  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ , инвариантных относительно матрицы  $A$ .

Если некоторый аннулирующий многочлен  $f(s)$  матрицы  $A$  представить в виде  $f(s) = \prod_{i=1}^m (s - s_i)^{r_i}$ , где  $s_i$  – все (различные) корни многочлена, а  $r_i$  – их кратности, то пространство  $\mathcal{X}$  разлагается на прямую сумму  $m$  подпространств  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ , инвариантных относительно матрицы  $A$ , причем эти подпространства являются нуль-пространствами матрицы  $(s_i \mathbf{I} - A)^{r_i}$ .

Наконец, если аннулирующий многочлен  $f(s)$  матрицы  $A$  представить в виде

$$f(s) = \prod_{i=1}^m (s - s_i)^{r_i} \prod_{j=1}^q (s^2 - 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{p_j},$$

где  $s_i$  – все различные вещественные корни многочлена, а  $s_{j,j+1} = \alpha_j \pm j\beta_j$ , – различные невещественные корни, то пространство  $\mathcal{X}$  разлагается на прямую сумму инвариантных

подпространств

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^m \mathcal{X}_k^r \oplus \sum_{k=1}^q \mathcal{X}_j^c.$$

Такому разбиению пространства состояний системы соответствует приведение матрицы  $A$  к канонической форме Жордана (2.1.3.).

Исходя из изложенного, пространство состояний  $\mathcal{X}$  системы можно представить в виде прямой суммы  $L$  инвариантных подпространств  $\mathcal{X}_i^A$ , т.е. каждый вектор  $x \in \mathcal{X}$  записать в виде линейной комбинации  $x = \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i$ , где  $x_i \in \mathcal{X}_i^A$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$  ([3, 53]). Рассмотрим связь этого разбиения с фазовыми портретами системы, обращая основное внимание на случай простых собственных чисел.

Если матрица  $A$  имеет попарно различные корни характеристического многочлена, то нетривиальными вещественными инвариантными подпространствами наименьшей размерности будут собственные прямые (для вещественных корней) и собственные плоскости (для мнимых комплексно-сопряженных корней характеристического многочлена). Пусть начальное состояние системы принадлежит собственной прямой  $\mathcal{G}_i$ , соответствующей (простому) вещественному корню  $s_i$ , т.е.  $x_0 = \alpha_i^0 x_i^0$ , где  $\alpha_i^0 \in \mathcal{R}$  – некоторое число, а  $x_i^0$  – собственный вектор, отвечающий собственному значению  $s_i$ . Для вектора фазовой скорости в этой точке можно записать  $v(x_0) = Ax_0 = \alpha_i^0 s_i x_i^0$ . Поэтому вектор фазовой скорости будет направлен по этой же прямой.<sup>4</sup> и собственные прямые системы соответствуют некоторым фазовым траекториям. Следовательно, вся фазовая траектория остается на прямой  $\mathcal{G}_i$ <sup>5</sup> При указанных начальных условиях нетрудно получить и формулу для процесса  $x(t)$ . Действительно, так как выполнено (5.1), то  $\dot{x}(t) = s_i x(t)$ ,  $x(0) = \alpha_i^0 x_i^0$ . Отсюда получаем решение  $x(t) = e^{s_i t} x(0)$ . Это выражение можно записать и в следующем виде. Введем функцию  $\alpha_i(t) \in \mathcal{R}$  как решение уравнения

<sup>4</sup> Строгое доказательство этого факта приведено, например, в [12].

<sup>5</sup> Заметим, что фазовая траектория принадлежит собственной прямой, но нельзя считать, что прямая  $\mathcal{G}_i$  является фазовой траекторией. Действительно, на прямой  $\mathcal{G}_i$  лежат по крайней мере три непересекающиеся фазовые траектории: две из них находятся по разные стороны от начала координат, а третья есть точка  $\{0\}$ . Кроме того, при  $s_i = 0$  каждая точка прямой  $\mathcal{G}_i$  является отдельной фазовой траекторией.

$\dot{\alpha}_i(t) = s_i \alpha_i(t)$ ,  $\alpha_i(0) = \alpha_i^0$ . Тогда  $x(t) = \alpha_i(t)x_i^0$ . Очевидно, что  $\alpha_i(t) = e^{s_i t} \alpha_i^0$ . Таким образом, изображающая точка будет двигаться вдоль прямой  $\mathcal{G}_i$  с коэффициентом  $\alpha_i(t)$ . Направление движения определяется знаком  $s_i$ : при  $s_i < 0$  движение будет направлено к состоянию равновесия  $\{0\}$ , при  $s_i > 0$  – от точки  $\{0\}$ , а при  $s_i = 0$  –  $x(t) \equiv x_0$ , и каждая точка прямой является состоянием равновесия.<sup>6</sup>

Обобщая приведенные рассуждения, примем, что система обладает  $k$  простыми вещественными корнями. Как отмечено выше, им отвечает  $k$  линейно независимых собственных векторов и, соответственно,  $k$  собственных прямых [3, 53, 115]. Из линейности системы следует, что движение при произвольных начальных условиях можно представить, как суперпозицию движений по собственным направлениям. Более подробно: если начальное состояние  $x(0)$  принадлежит инвариантному подпространству, порожденному собственными векторами  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$ , то это состояние можно разложить по базису, состоящему из собственных векторов:  $x(0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i^0$ . Тогда решение  $x(t)$  имеет вид:  $x(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) x_i^0$ , где  $\alpha_i(t) = e^{s_i t} \alpha_i^0$ .

Если имеются простые мнимые комплексно-сопряженные корни характеристического многочлена, то они не определяют никакого собственного направления в вещественном пространстве. Однако с помощью изложенного в п. 3.1.2. приема таким корням можно поставить в соответствие собственную плоскость, которая также является инвариантным подпространством матрицы  $A$ . Рассуждая аналогично предыдущему случаю приходим к выводу, что траектория, начинающаяся на собственной плоскости будет ей всегда принадлежать.

Окончательно можно сделать вывод, что при отсутствии кратных корней характеристического многочлена фазовую траекторию можно получить суперпозицией движений по собственным прямым и собственным плоскостям.

Случай кратных корней более сложен, так как при нем возможны ситуации, в которых нельзя разложить пространство на сумму инвариантных подпространств размерности не более двух.

В следующем параграфе вид фазовых траекторий на плос-

---

<sup>6</sup> Напомним, что здесь мы рассматриваем случай простых вещественных корней.

кости будет рассмотрен более подробно.

### 5.3. Виды фазовых портретов для систем второго порядка

Рассмотрим линейные системы второго порядка,  $\mathcal{X} = \mathcal{R}^2$ . Их состояние можно изобразить в виде точки на плоскости <sup>7</sup>.

Рассмотрим некоторые случаи.

Пусть собственные числа  $s_1, s_2$  матрицы  $A$  действительны и отличны от нуля,  $s_1 \neq s_2$ . Тогда имеются единственное состояние равновесия в точке  $\{0\}$  и две несовпадающие собственные прямые  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ . Если  $s_i < 0$ , то движение изображающей точки по прямой  $\mathcal{G}_i$  направлено к состоянию равновесия, если  $s_i > 0$  – от этого состояния. При  $s_i = 0$  изображающая точка на прямой  $\mathcal{G}_i$  неподвижна. Отметим также, что точка, расположенная между некоторыми лучами собственных прямых, в процессе движения всегда остается между ними, так как по этим лучам проходят фазовые траектории, а различные фазовые траектории пересекаться не могут.

Более детальное описание фазового портрета системы зависит от знаков  $s_1, s_2$ .

1. *Устойчивый узел.* Если  $s_1 < 0, s_2 < 0$ , все фазовые траектории направлены к состоянию равновесия – точке  $\{0\}$  – и асимптотически к нему приближаются (см. рис. 5.2, а). Система асимптотически устойчива. Такой фазовый портрет свойственен собственным движениям апериодического звена второго порядка, имеющего передаточную функцию

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (T_1 > 0, T_2 > 0).$$

2. *Неустойчивый узел.* Если  $s_1 > 0, s_2 > 0$ , то картина фазовых траекторий тоже имеет вид узла, но направление движения меняется на противоположное. Такой тип

---

<sup>7</sup> Несмотря на то, что обычно исследуются системы более высокого порядка, изучение движений на плоскости оказывается полезным. Действительно, при простых собственных числах матрицы  $A$  система "распадается" на ряд подсистем не выше второго порядка. Кроме того, часто при исследовании можно пренебречь малыми постоянными времени. Тогда поведение системы с достаточной для практики точностью описывается уравнениями второго порядка.

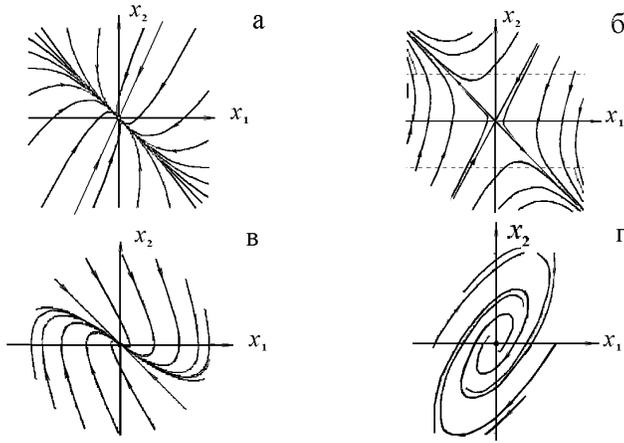


Рис. 5.2. Фазовые портреты систем второго порядка.

поведения свойственен неустойчивым системам. Пример – собственные движения звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s - 1)(T_2 s - 1)}, \quad (T_1 > 0, T_2 > 0).$$

3. *Седло.* Если знаки собственных чисел противоположны между собой, например,  $s_1 > 0$ ,  $s_2 < 0$ , то по прямой  $\mathcal{G}_1$  движение происходит от состояния равновесия, а по прямой  $\mathcal{G}_2$  – к этому состоянию (см. рис. 5.2, б). Несмотря на то, что здесь имеются траектории, направленные к началу координат и соответствующие затухающим процессам, седло свойственно неустойчивым системам. Пример – звено с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s - 1)(T_2 s + 1)}, \quad (T_1 > 0, T_2 > 0).$$

4. *Один из корней имеет нулевое значение.* Пусть, например,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 \neq 0$ . Тогда прямая  $\mathcal{G}_1$  образует множество состояний равновесия системы и движения по ней не происходит. Фазовый портрет состоит из прямых, параллельных  $\mathcal{G}_1$ . Если  $s_2 < 0$ , то движение по траекториям направлено в сторону прямой  $\mathcal{G}_1$ , иначе – в противоположную сторону. Такие

процессы свойственны устойчивому и неустойчивому интегрирующим звеньям с передаточными функциями

$$W(s) = \frac{K}{s(T_2s + 1)} \quad \text{и} \quad W(s) = \frac{K}{s(T_2s - 1)}$$

соответственно ( $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$ ).

5. *Оба корня равны нулю.* Данный случай отвечает наличию у системы кратных собственных чисел, и вид фазового портрета зависит от размера жордановых клеток. Если жорданова форма матрицы  $A$  представлена двумя клетками первого порядка (т.е. матрица Жордана нулевая), то фазовые траектории представляют собой точки на плоскости и каждое состояние системы есть состояние равновесия. Примером такой системы являются два независимых между собой идеальных интегрирующих звена. Если жорданова клетка имеет размер два, то фазовые траектории представляют собой множество прямых, параллельных собственной прямой. По этой прямой движения не происходит (она образует множество состояний равновесия), а по разные стороны от нее изображающие точки движутся в противоположных направлениях. Такой характер фазовых траекторий свойствен двойному интегрирующему звену  $W(s) = \frac{K}{s^2}$ . Заметим, что если в первом случае система нейтрально-устойчива, то во втором – неустойчива.

6. *Кратные ненулевые вещественные корни.* Если у системы имеются кратные ненулевые вещественные собственные числа  $s_1 = s_2$ , то также возможны два существенно различных случая. Если каноническая жорданова форма матрицы состоит из двух клеток порядка один, то общее решение уравнения (5.1) имеет вид  $x(t) = e^{s_1 t}$  и описывает совокупность лучей, выходящих из начала координат. При  $s_1 = s_2 < 0$  движение происходит в направлении к началу координат, а при  $s_1 = s_2 > 0$  – в противоположную сторону. Примером системы с таким типом фазовых траекторий является система, состоящая из двух независимых апериодических звеньев с равными постоянными времени.

Если каноническая жорданова форма матрицы состоит из одной клетки порядка два, то имеется одна собственная прямая, на которой лежат фазовые траектории при соответствующих начальных условиях и множество кривых, заполняю-

щие полуплоскости, разделенные данной прямой (рис. 5.2, в). Такой вид фазового портрета в окрестности состояния равновесия называется *устойчивым вырожденным узлом* – при  $s_1 = s_2 < 0$  и *неустойчивым вырожденным узлом* – при  $s_1 = s_2 > 0$ . Этот фазовых траекторий характерен для последовательно соединенных апериодических звеньев с одинаковыми постоянными времени, т.е. системе с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2}, \quad \text{или} \quad W(s) = \frac{K}{(Ts - 1)^2}, \quad (T > 0).$$

Рассмотрим теперь систему с мнимыми комплексно-сопряженными собственными числами  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ,  $\beta > 0$ . В этом случае также имеется единственное состояние равновесия в точке  $\{0\}$ . Вид фазовых портретов зависит от значения  $\alpha$ .

7. *Фокус*. При  $\alpha \neq 0$  получаем систему кривых, имеющих вид афинно-искаженных логарифмических спиралей. При  $\alpha < 0$  движение происходит к состоянию равновесия (*устойчивый фокус*), а при  $\alpha > 0$  – от этого состояния (*неустойчивый фокус*) (см. рис. 5.2, в).

Устойчивый фокус свойственен колебательным звеньям с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}, \quad (0 < \xi < 1, T > 0,)$$

а неустойчивый – звеньям

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 - 2\xi Ts + 1}$$

(с теми же диапазонами значений параметров).

8. *Центр*. При  $\alpha = 0$  получаем систему замкнутых эллиптических траекторий с центром в начале координат. Этим траекториям соответствуют периодические процессы с периодом  $2\pi/\beta$  – незатухающие гармонические колебания. Примером может служить консервативное звено с передаточной функцией  $W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1}$ .

Обратимся теперь к характерным особенностям фазовых портретов на плоскости при каноническом представлении уравнений состояния. Рассмотрим диагональную (вещественную жорданову) форму (см. 2.1.) и каноническую форму фазовой переменной (см. 2.2.), как наиболее распространенные.

5.3.1. *Фазовые портреты при диагональной (жордановой) форме матрицы  $A$*

В том случае, когда матрица  $A$  представлена в *собственном базисе*, построение фазовых портретов несколько упрощается. Например, можно получить достаточно простые формулы для фазовых кривых. Рассмотрим отдельно случаи вещественных и мнимых собственных чисел.

1. *Вещественные различные корни. Узел и седло.* Выше, в п. 5.3. рассмотрены характерные виды фазовых портретов, в том числе – и при  $s_1, s_2 \in \mathcal{R}, s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_1 \neq s_2$ . Уточним вид фазовых кривых при диагональной матрице  $A = \text{diag}\{s_1, s_2\}$  для этого случая. Как отмечено выше (см. 3.1.1.), при вещественных различных корнях характеристического многочлена матрицы ее собственные векторы направлены вдоль ортогональных координатных осей. Примем, что  $x_0^1 = \mathbf{e}_1 = [1, 0]^T, x_0^2 = \mathbf{e}_2 = [0, 1]^T$ . Уравнения состояния (5.1) тогда принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = s_1 x_1(t), & x_1(0) = x_{1,0} \\ \frac{dx_2}{dt} = s_2 x_2(t), & x_2(0) = x_{2,0}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Исключая из (5.3) время (это можно сделать, формально ”поделив” второе уравнение на первое с учетом  $s_1 \neq 0$ ), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Принимая в качестве аргумента  $x_1$ , получим выражение для  $x_2$  :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_2 x_2}{s_1 x_1}, \quad \frac{dx_2}{x_2} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{dx_1}{x_1},$$

$\ln|x_2| = \frac{s_2}{s_1} \ln|x_1| + C_1$ , откуда окончательно получаем выражение

$$|x_2| = C|x_1|^{\frac{s_2}{s_1}}, \quad (s_1 \neq 0, x_1 \neq 0). \quad (5.4)$$

Выражение (5.4) описывает линии, на которых расположены фазовые кривые в указанных случаях. Заметим, что при совпадающих знаках собственных чисел эти кривые имеют вид ”парабол”, а при разных знаках – ”гипербол”. Первый вид фазового портрета соответствует узлу (устойчивому или неустойчивому), а второй – седлу.

Значение константы  $C$  в (5.4) определяется из начальных условий  $C = |x_{2,0}| \cdot |x_{1,0}|^{-\frac{s_2}{s_1}}$ . При построении фазового портрета эту связь можно не рассматривать, а использовать набор различных значений  $C$ .

Выражение (5.4) применимо также, если один из корней (для определенности  $-s_2$ ) обращается в ноль. Тогда (5.4) описывает множество параллельных оси абсцисс прямых. Движение по этим прямым направлено либо к оси ординат ( $s_1 < 0$ ), либо от нее. По выражению (5.4) можно найти вид траекторий при кратных корнях, если  $A = \text{diag}\{s_1, s_1\}$ . Получается "пучок" прямых, проходящих через начало координат. Ось ординат представляет множество состояний равновесия.

Для вещественной жордановой клетки  $A = \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}$  вид траекторий более сложный [79] и формула (5.4) не применима.

2. *Нулевые кратные корни.* Представляет интерес второй из рассмотренных в пункте 5 п. 5.3. случаев двойного интегрирующего звена, уравнения которого в жордановой форме имеют матрицу  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Уравнения состояния тогда принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), & x_1(0) = x_{1,0}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 0, & x_2(0) = x_{2,0}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Отсюда получаем решения  $x_1(t) = x_{1,0} + x_{2,0}t$ ,  $x_2(t) = x_{2,0}$ . Фазовые траектории – прямые, параллельные оси абсцисс, но движение по ним направлено "вправо" при  $x_{2,0} > 0$  и "влево" при  $x_{2,0} < 0$ . Точки на оси абсцисс служат состояниями равновесия системы.

3. *Мнимые корни. Фокус и центр.* Пусть теперь характеристический многочлен имеет корни  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ , причем  $\beta > 0$ . Соответствующая вещественная жорданова форма матрицы  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ , а уравнения состояния –

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), & x_1(0) = x_{1,0}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1(t) + \alpha x_2(t), & x_2(0) = x_{2,0}. \end{cases} \quad (5.6)$$

При  $\alpha = 0$  после исключения  $t$  и несложных преобразований получаем уравнение концентрических окружностей с центром в начале координат  $x_1^2 + x_2^2 = C$ ,  $C \geq 0$  (центр). При выбранном знаке  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) движение изображающей точки будет происходить по часовой стрелке. В этом нетрудно убедиться, рассматривая, например, вектор фазовой скорости при  $x_1 > 0$ ,  $x_2 = 0$ .

При  $\alpha \neq 0$  вид фазовых траекторий усложняется. Они представляют собой логарифмические спирали, уравнения которых удобнее записывать в полярных координатах. Введем  $\rho \geq 0$  – расстояние от начала координат до точки на кривой,  $\rho = |x|$ ,  $\varphi$  – угол между этой точкой и осью абсцисс. Тогда можно получить уравнения [79]

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho(0)e^{\alpha t}, & \rho(0) = |x(0)|, \\ \varphi = \varphi(0) - \beta t, \end{cases} \quad (5.7)$$

описывающие движение изображающей точки в параметрической форме. Исключив параметр  $t$  (например, выразив его из второго уравнения), получим явную связь между полярными координатами. При  $\alpha < 0$  все точки будут двигаться по траекториям к началу координат (устойчивый фокус), а при  $\alpha > 0$  – ”разбегаться” от него (неустойчивый фокус).

Обратимся теперь к другой форме – канонической форме фазовой переменной.

### 5.3.2. Фазовые портреты при канонической форме фазовой переменной

Эта форма уравнений состояния соответствует представлениям УКП и НКП (которые для автономных систем дают одинаковые уравнения состояния). Матрица  $A$  в данном базисе имеет вид матрицы Фробениуса (2.10). Для систем второго порядка это означает, что  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$ , где  $a_1$ ,  $a_2$  – коэффициенты характеристического многочлена  $\Lambda(s) = s^2 + a_1s + a_2$ . Такой матрице отвечают уравнения состояния

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), & x_1(0) = x_{1,0} \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_2x_1(t) - a_1x_2(t), & x_2(0) = x_{2,0}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Перечислим некоторые особенности фазовых траекторий в указанном базисе.

- Поскольку переменная  $x_2(t)$  совпадает с производной по времени от  $x_1(t)$ , изображающая точка будет двигаться только "по часовой стрелке", т.е. в сторону возрастания  $x_1$  в верхней полуплоскости (где  $x_2 > 0$ ) и в сторону убывания  $x_1$  в нижней полуплоскости (где  $x_2 < 0$ ).

- Фазовые кривые, пересекающие ось абсцисс (ось  $x_1$ ), имеют в точках пересечения перпендикулярные к ней касательные.

- Состояния равновесия системы могут располагаться только на оси абсцисс.

- Точкам пересечения фазовой траекторией оси абсцисс соответствуют экстремумы переходного процесса  $x_1(t)$ .

Рассмотрим более подробно случай простых вещественных собственных чисел. Пусть  $s_1 \neq s_2$ ,  $s_1, s_2 \in \mathcal{R}$ . Как отмечено выше, при вещественных корнях характеристического многочлена имеются собственные векторы  $x_1^0 = \text{col}\{1, s_1\}$ ,  $x_2^0 = \text{col}\{1, s_2\}$ , линейно независимые при  $s_1 \neq s_2$ . Соответствующие им собственные прямые лежат в первом и третьем квадрантах ( $s_i > 0$  – процесс расходится) или во втором и четвертом квадрантах ( $s_i < 0$  – решение вдоль прямой затухает). Соответственно, получаем устойчивый или неустойчивый узел, или седло. На рис. 5.3 показаны фазовые портреты и переходные процессы типа "седло" (а),  $s_1 = 1, s_2 = -3$  и "устойчивый фокус" (б),  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ,  $\alpha = -0.2, \beta = 1$ , для системы (5.8). Одинаковыми буквами отмечены соответствующие точки на фазовой плоскости и на графике переходного процесса.

Для выполнения вычислений п. б) использована следующая программа моделирования линейной системы:

```

al=-0.2; beta=1;
– задание параметров системы;
A=[0 1; -(al^2+beta^2) 2*al]
– формирование матрицы A;
x0=[0.5, 0.3];
– задание начальных условий;
t=0:0.05:15;
– задание времени и шага моделирования;
u=zeros(size(t));

```

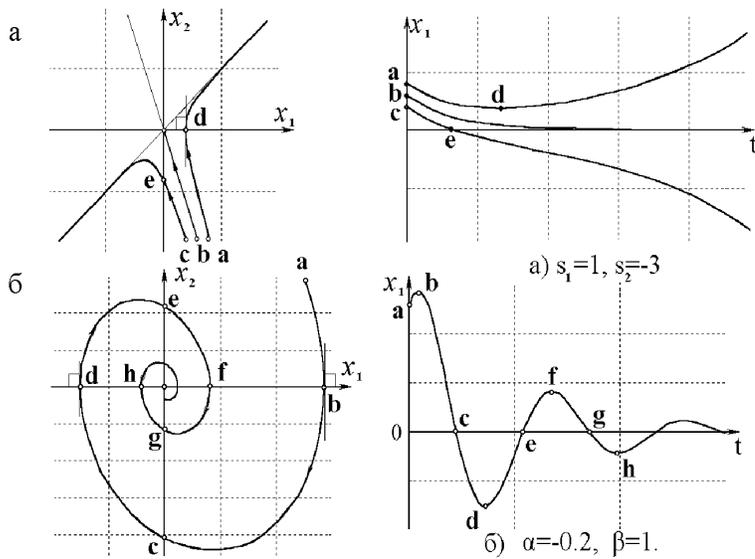


Рис. 5.3. Фазовые портреты и переходные процессы в (5.8).

- задание нулевого входного воздействия;
- `y=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);`
- моделирование системы;
- `plot(y(:,1),y(:,2),'w'),grid`
- вывод фазового портрета;
- `plot(t,y(:,1),'w'),grid`
- вывод переходного процесса.

В программе использована описанная в Приложении 3 процедура моделирования линейных непрерывных систем **lsim**.

В данном базисе по виду фазовой траектории можно получить и дополнительную информацию о скорости протекания процесса. Например, время движения точки по отрезку параллельной оси абсцисс прямой равно отношению длины этого отрезка (в соответствующем масштабе) к значению ординаты  $x_2$ . Далее, если рассматриваются две кривые на участках с одинаковыми абсциссами, то время движения меньше по той из них, которая наиболее удалена от оси абсцисс.

Данные рассуждения, вместе с приведенными в п. 5.3. по-

зволяют получить достаточно наглядное представление о фазовых портретах в указанном базисе, но для точного построения траекторий их недостаточно. Здесь может оказаться удобным следующий метод. Вычисляется матрица преобразования  $T$  уравнений состояния к канонической жордановой форме, для которой строится фазовый портрет (как указано в 5.3.1.). Затем точки на полученных траекториях обратным преобразованием с матрицей  $T^{-1}$  переводятся на исходную плоскость. Заметим, что данный метод можно использовать для построения фазовых портретов в любом базисе, а не только в базисе канонической формы фазовой переменной.

Достаточно просто можно представить вид фазовых траекторий и для систем третьего порядка. При простых корнях характеристического многочлена имеются или три собственные прямые, определяемые векторами  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ , либо собственная прямая и плоскость, порожденная векторами  $h_1, h_2$  (как описано в 4.3.). Движение точки в пространстве получается как суперпозиция движений по указанным подпространствам. Более детальные сведения по этому вопросу приведены в [12].

#### 5.4. Задачи и упражнения

1. Для вариантов а) – г) систем второго порядка  $\dot{x} = Ax$

$$\text{при а) } A = \begin{bmatrix} 0.875 & -1.125 \\ 1.125 & -1.675 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} -7.9 & 2.6 \\ -22.9 & 7.5 \end{bmatrix}, \quad \text{г) } A = \begin{bmatrix} -50.8 & 26 \\ -101 & 51.2 \end{bmatrix}$$

построить фазовые портреты в исходном и собственном (с. 121) базисах, в базисе канонической формы фазовой переменной (с. 123), используя метод, описанный в конце предыдущего параграфа.

2. Для систем третьего порядка, фазовые портреты которых приведены на рис. 5.4, качественно показать расположение собственных чисел на комплексной плоскости (масштабы по всем осям одинаковые).

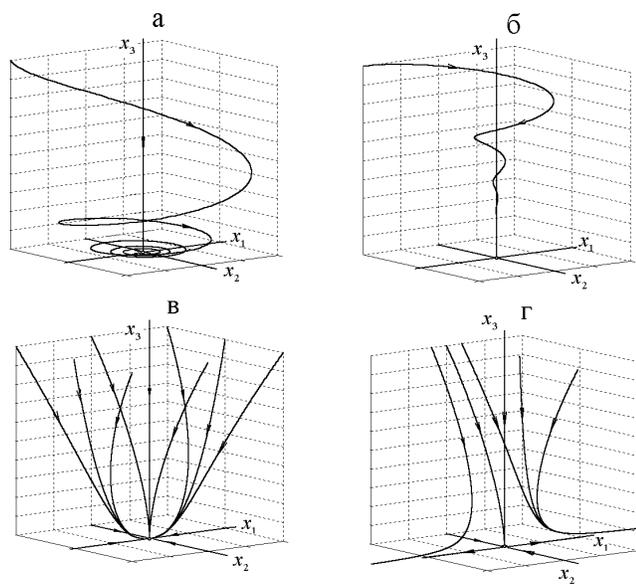


Рис. 5.4. Фазовые портреты к задаче 2.

## 6. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ. ФОРМУЛА КОШИ

### 6.1. Решение уравнений состояния. Формула Коши

Рассмотрим линейную систему, заданную уравнением состояния

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ . Нас интересует решение *задачи Коши* – т.е. определение функции  $x(t)$  по заданному начальному состоянию  $x_0$  при известном входном процессе  $u(t)$ .<sup>1</sup> Рассмотрим вначале решение однородного уравнения.

#### 6.1.1. Решение однородного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (6.2)$$

$x(t) \in \mathcal{R}^n$ . Пусть нам известно  $n$  решений (6.2) относительно некоторого момента  $t_0$ :  $x_i(t_0) = x_{0,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Объединим эти решения  $x_i(t)$  в  $n \times n$ -матричную функцию  $X(t) \triangleq [x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_n(t)]$ . Из теории дифференциальных уравнений известен следующий результат [12, 79, 97] ("*альтернатива Вронского*"): либо *определитель Вронского*  $W(t) \triangleq \det X(t) \equiv 0$  (для всех  $t$ ), либо  $W(t) \neq 0$  (ни при каком  $t$ ). Поэтому если векторы  $x_{0,i}$  линейно независимы, то матрица  $X(t)$  будет невырожденной при всех  $t$ . Полученная таким образом матрица  $X(t)$  называется *фундаментальной матрицей системы* (6.2). Это название связано с тем, что вектор-функции  $x_i(t)$  образуют *фундаментальную систему решений* данного уравнения: решение задачи Коши при произвольных начальных условиях  $x_0$  может быть выражено в виде линейной комбинации функций  $x_i(t)$ :  $x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)$ , где  $\alpha_i$  есть коэффициенты разложения начального вектора  $x_0$  по системе базисных векторов  $x_{0,i}$ , (т.е.  $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{0,i}$ ). С использованием фундаментальной матрицы  $X(t)$  это факт можно записать в векторной

---

<sup>1</sup> Отметим, что если процесс  $x(t)$  получен, то определение выхода системы  $y(t)$  не представляет сложности и выполняется непосредственно по уравнению выхода  $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ .

форме:  $x(t) = X(t)C$ , где вектор  $C = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$  определяется из уравнения  $x_0 = X_0 C$ . Заметим, что матрица-функция  $X(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = X_0.$$

Теперь введем матрицу  $\Phi(t, t_0) \triangleq X(t)X_0^{-1}$ , называемую *переходной*, или *импульсной, матрицей*. Очевидно, что  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n$  - единичная матрица. Фактически  $\Phi(t, t_0)$  есть фундаментальная матрица, полученная, если в качестве начальных векторов  $x_{0,i}$  использовать единичные векторы

$$\mathbf{e}_i = [0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0]^T.$$

Таким образом, для переходной матрицы выполнено уравнение

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n. \quad (6.3)$$

С учетом того что решение однородного уравнения определяется через фундаментальную матрицу и что коэффициенты разложения  $x_0$  по системе единичных векторов совпадают с компонентами  $x_0^{(i)}$  вектора  $x_0$ , получим решение однородного уравнения (6.2) через переходную матрицу в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0. \quad (6.4)$$

Чтобы воспользоваться полученным выражением, следует располагать способом вычисления переходной матрицы. К сожалению, в общем случае нет аналитического выражения для определения  $\Phi(t, t_0)$ . В некоторых практических задачах можно решить (6.3) численно, а затем использовать (6.4) при различных начальных условиях. Однако такой способ связан с хранением больших объемов данных и имеет ограниченное применение. В некоторых случаях целесообразно выражать решение в виде рядов [25]. Существенное упрощение получается в стационарном случае, т.е. при постоянной матрице  $A(t) \equiv A$ . Для таких систем матрица  $\Phi(t, t_0)$  зависит только от одного аргумента  $\tau = t - t_0$  и совпадает с *матричной экспонентой*  $\Phi(t, t_0) = \mathbf{e}^{A\tau}$ ,  $\tau = t - t_0$ , определяемой в виде ряда

$$\mathbf{e}^{A\tau} \triangleq \mathbf{I}_n + A\tau + \frac{(A\tau)^2}{2} + \dots + \frac{(A\tau)^k}{k!} + \dots \equiv \mathbf{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A\tau)^k}{k!}. \quad (6.5)$$

Таким образом, для стационарных однородных линейных систем решение задачи Коши определяется формулой

$$x(t) = e^{A\tau} x_0, \quad \tau = t - t_0. \quad (6.6)$$

Заметим, что поведение таких систем не зависит от начального момента времени  $t_0$  (а только от временного промежутка  $\tau = t - t_0$ ), поэтому в стационарном случае удобно считать  $t_0 = 0$  и выражение (6.6) записывать в виде

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (6.7)$$

Вычисление матричной экспоненты является значительно более простой задачей, чем нахождение переходной матрицы в общем случае. Так, для диагональной матрицы  $A = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  матрица  $e^{At}$  также диагональная и состоит из скалярных экспонент:  $e^{At} = \text{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}\}$ . Достаточно простой вид матричная экспонента имеет и для более общей, жордановой, формы матрицы  $A$ . Некоторые аспекты вычисления матричной экспоненты в общем случае будут рассмотрены ниже (в 6.5.), а сейчас обратимся к решению неоднородного уравнения (6.1).

### 6.1.2. Решение неоднородного уравнения

Как известно, решение любого неоднородного линейного уравнения (6.1) можно представить в виде  $x(t) = x_n(t) + x_b(t)$ , где  $x_n(t)$  – переходная составляющая – решение соответствующего однородного уравнения (6.2) при заданных начальных условиях;  $x_b(t)$  – вынужденная составляющая – решение уравнения (6.1) при нулевых начальных условиях. Оно имеет вид [3, 47, 94, 66]

$$x_b(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Учитывая выражение (6.4), запишем следующую формулу Коши:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (6.8)$$

Для стационарных систем эта формула принимает вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (6.9)$$

или, при  $t_0 = 0$ ,  $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ . Рассмотрим небольшой пример.

Пример. Получим переходную характеристику аperiodического звена первого порядка, заданного передаточной функцией  $W(s) = \frac{1}{Ts+1}$ . Этому звену соответствуют уравнения состояния  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $y(t) = Cx(t)$ , где  $A = -1/T$ ,  $B = 1/T$ ,  $C = 1$ . Полагая  $x_0 = 0$ ,  $u(t) \equiv 1$ , получим по формуле (6.9)

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-(t-\tau)/T} d\tau = e^{-t/T} \cdot e^{\tau/T} \Big|_0^t = 1 - e^{-t/T},$$

что совпадает с известным выражением для переходной характеристики.

### 6.1.3. Свойства переходной матрицы

Приведем перечень основных свойств переходной матрицы.

1. Для всех  $t_0$  выполнено  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n$ .
2. *Правило композиции:* для всех  $t_0, t_1, t$  выполнено

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0).$$

3.  $\det \Phi(t, t_0) \neq 0$  для всех  $t_0, t$ .
4.  $\Phi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}$ , где  $X(t)$  – любая фундаментальная матрица.
5.  $\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t)$  для всех  $t_0, t$ .
6. Справедливо уравнение

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n.$$

7. Матрица  $\Phi(t_0, t)^T$  удовлетворяет следующему сопряженному уравнению

$$\frac{d\Phi(t_0, t)^T}{dt} = -A(t)^T \Phi(t, t_0)^T, \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n.$$

Данное свойство полезно при исследовании нестационарных систем, так как дает способ получения ”сечений” переходной матрицы по аргументу  $t_0$ .

8. Если  $\det T \neq 0$ , то  $\Phi(t, t_0) = T^{-1}\tilde{\Phi}(t, t_0)T$ , где  $\tilde{\Phi}(t, t_0)$  удовлетворяет уравнению (6.3), в котором вместо матрицы  $A(t)$  подставлена подобная ей матрица  $\tilde{A}(t) = TA(t)T^{-1}$ . В частности, это справедливо и для матричной экспоненты  $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^{AT}$ .

9. В стационарном случае

$$\Phi(t + \tau, t_0 + \tau) = \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = e^{At} \cdot e^{-At_0}.$$

Рассмотрим теперь некоторые следствия из формулы Коши.

## 6.2. Вычисление функции веса

Весовая (импульсная) функция  $w(t)$  обычно определяется, как реакция системы на  $\delta$ -образное входное воздействие при нулевых начальных условиях [15, 66, 76, 95]. Эта функция имеет много разных применений при исследовании систем автоматического управления (САУ), и задача ее получения, например – численными методами, является актуальной. Очевидная трудность состоит в том, что  $\delta$ -функция Дирака не может быть реализована на аналоговых или цифровых моделирующих установках. Рассмотрим решение этой задачи без введения  $\delta$ -функций во входное воздействие.

Предварительно сделаем следующее замечание. Выходной процесс системы  $y(t)$ , и тем более его производные  $\frac{d^i y}{dt^i}$ , могут иметь разрывы при разрывном входном воздействии  $u(t)$ . Поэтому при определении  $w(t)$  указываются начальные условия до момента приложения входного воздействия, т.е. принимается, что  $u(t) \equiv 0$  при  $t < 0$  и  $y^i(0_-) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{d^i y}{dt^i} = 0$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ . Что касается состояния системы  $x(t)$ , то, как следует из формулы (6.9), оно изменяется непрерывно, если  $u(t)$  не содержит разрывов второго рода. Действительно, тогда интеграл в правой части (6.9) обращается в нуль при равенстве верхнего и нижнего пределов интегрирования. Поэтому в интересующем нас случае  $x(0) = x(0_-)$ . При определении  $w(t)$  полагаем  $x_0 = 0$ . Поскольку входное воздействие  $u(t) = \delta(t)$  имеет разрыв второго рода, значение  $x(0_+) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$  будет отличаться от  $x_0$ . Чтобы определить  $x(0_+)$ , используем основное свойство  $\delta$ -функций: для

любой непрерывной при  $t = 0$  функции  $f(t)$  и  $t \geq 0$  выполнено  $\int_0^t f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$ . Используя это свойство в формуле (6.9) при  $u(t) = \delta(t)$ ,  $x_0 = 0$ , получим  $x(t) = e^{At}B$ . Теперь из уравнения выхода  $y(t) = Cx(t)$  получим искомую весовую функцию в виде  $w(t) = Ce^{At}B$ . Для несобственных систем  $w(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ .<sup>2</sup>

Заметим теперь, что полученное выражение для  $x(t)$  совпадает с собственным движением системы при начальном состоянии  $x_0 = B$ . Значит, для вычисления весовой функции можно решить однородное уравнение  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  при начальном условии  $x_0 = B$  и вычислить  $w(t) = Cx(t)$ ; иначе говоря, следует промоделировать исходную систему при нулевом входном воздействии и ненулевом начальном состоянии. Такой способ определения функции веса соответствует принятому в работах по теории дифференциальных уравнений подходу, согласно которому эта функция определяется как решение однородного уравнения при соответствующих начальных условиях, а вид реакции системы на  $\delta$ -функцию выводится в качестве следствия.

### 6.3. Определение начального состояния по начальному значению выхода и его производных

В ряде случаев исходное описание системы имеет вид дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_m u(t), \quad (6.10)$$

для которого заданы начальные условия  $y(0_-)$ ,  $\dot{y}(0_-)$ ,  $\dots$ ,  $y^{n-1}(0_-)$ . Требуется определить начальное значение  $x_0$  вектора состояния системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.11)$$

эквивалентное данным начальным условиям с точки зрения реакции на входное воздействие.

<sup>2</sup> Здесь предполагалось, что входной процесс скалярный,  $u(t) \in \mathcal{R}$ , следовательно,  $B$  – одностолбцовая матрица. Данный результат легко обобщается на векторный случай, в котором подстановкой  $i$ -го столбца матрицы  $B$  в найденное выражение для  $w(t)$  получим набор весовых функций  $w_i(t)$  по каждому входу  $u_i$ .

Для простоты изложения будем считать, что  $u(t) \equiv 0$  при  $t < 0$  и что входное воздействие не содержит  $\delta(t)$ . С учетом этого, для  $t < 0$  из (6.11) получим

$$y(0_-) = Cx_0, \quad \dot{y}(0_-) = \dot{x}(0) = CAx_0, \dots, y^{n-1}(0_-) = CA^{n-1}x_0.$$

Таким образом, нами найдена система  $n$  уравнений относительно  $n$  неизвестных компонент начального вектора  $x_0$

$$\begin{cases} Cx_0 & = & y(0_-), \\ CAx_0 & = & \dot{y}(0_-), \\ & \dots & \\ CA^{n-1}x_0 & = & y^{n-1}(0_-). \end{cases} \quad (6.12)$$

Систему (6.12) удобно записать в матричной форме. Для этого введем матрицу

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

и вектор  $z \triangleq [y(0_-), \dot{y}(0_-), \dots, y^{n-1}(0_-)]^T$ . Тогда уравнение (6.12) принимает вид  $Qx_0 = z$ , откуда получаем  $x_0 = Q^{-1}z$ . Заметим, что задача имеет единственное решение, если матрица  $Q$  невырожденная  $\det Q \neq 0$ . Как будет показано ниже, в 7.3., данное условие означает *полную наблюдаемость* системы (6.11). Это приводит к некоторым ограничениям в выборе базиса уравнений состояния. Например, если (6.11) имеет вид НКП (см. 2.3.), то  $Q = \mathbf{I}_n$  при любых коэффициентах уравнения (6.10), следовательно,  $x_0 = z$ .

Заметим, кроме того, что при нулевых начальных условиях  $y(0_-) = 0, \dot{y}(0_-) = 0, \dots, y^{n-1}(0_-) = 0$  выполнено  $z = 0$  и, соответственно,  $x_0 = 0$ . Поэтому в распространенном случае расчета реакций системы (6.10), имеющей нулевые начальные условия, начальное состояние  $x_0$  также равно нулю (кроме рассмотренной в п. 6.2. реакции на  $\delta(t)$ ).

#### 6.4. Дискретные модели непрерывных систем

Важным следствием из формулы Коши являются алгоритмы преобразования моделей систем, заданных в виде дифференциальных уравнений, к разностным уравнениям. Это преобразование связано с задачей построения *дискретных моделей непрерывных систем*. Рассмотрим ее более подробно.

### 6.4.1. Постановка задачи дискретизации

Пусть математическая модель системы имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \in \mathcal{R}. \quad (6.13)$$

Требуется получить эквивалентную систему разностных уравнений:<sup>3</sup>

$$x[k+1] = Px[k] + Qu[k], \quad y[k] = C'x[k] + D'u[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.14)$$

Эквивалентность систем понимается в том смысле, что при соответствующих начальных условиях их реакции на одно и то же входное воздействие совпадают. Более подробно, это означает, что при  $u[k] = u(t_k)$ , где  $t_k = kT_0$ ,  $T_0 = \text{const}$  – интервал квантования, или период дискретности, выполнено  $y[k] = y(t_k)$  – решения уравнений (6.13) и (6.14) совпадают при  $t_k = kT_0$ .

Перечислим ряд приложений, для которых решение этой задачи актуально.

**1. Исследование импульсных систем.** Импульсные системы фактически являются системами непрерывного действия, но в силу прерывания измерений сигнала импульсным элементом они ведут себя, как нестационарные с периодически изменяемым коэффициентом. Существенно упростить исследование таких систем можно, если представлять их дискретными моделями, описывающими процессы относительно моментов "срабатывания" импульсного звена.

**2. Исследование цифровых систем управления.** Это приложение является одним из наиболее актуальных в связи с широким применением цифровых вычислительных устройств в САУ.

В таких системах управляющая ЭВМ работает в режиме реального времени совместно с управляемой (непрерывной) системой. По принципу действия ЭВМ является устройством дискретного времени и процесс преобразования в ней сигнала описывается разностными уравнениями. Таким образом,

---

<sup>3</sup> Здесь и далее при указании на значение функции дискретного аргумента  $k = 0, 1, \dots$  последний помещается в квадратные скобки. Значения одноименной функции вещественного аргумента  $t \in \mathcal{R}$ , при записи которых использованы круглые скобки, могут быть, вообще говоря, другими.

имеется "гибридная" система, модель которой имеет вид дифференциально-разностных уравнений. Распространенным методом исследования таких систем является переход к единой форме описания как регулятора (закона управления), так и объекта в виде разностных уравнений. Таким образом, в данном случае требуется найти дискретную модель управляемого объекта.

**3. Синтез цифровых систем управления по непрерывной модели.** Данный подход является в некотором смысле альтернативным предыдущему. В соответствии с ним система в целом рассматривается сначала как непрерывная и для нее известными методами теории непрерывных систем разрабатывается закон управления. Затем выполняется переход к описанию полученного закона разностными уравнениями для цифровой реализации. После этого производится исследование синтезированной непрерывно-дискретной системы, которое позволяет установить, насколько существенным является квантование процесса управления на динамику. Отметим, что при достаточно малом (по сравнению со временем  $t_n$  переходных процессов в замкнутой системе) интервале  $T_0$  это влияние обычно оказывается незначительным и такой подход оправдан.<sup>4</sup> Данный метод находит широкое применение в близкой задаче синтеза цифровых частотно-избирательных фильтров по аналоговому прототипу [26].

Обоснование и исследование применимости этого метода для широкого класса нелинейных систем дано в рамках так называемого "метода непрерывных моделей" [36].

**4. Численное решение дифференциальных уравнений.** При решении дифференциальных уравнений на ЭВМ реализуется некоторая рекуррентная процедура. Эта процедура описывается соответствующим разностным уравнением, которое может рассматриваться в качестве дискретной модели исходной непрерывной системы.

Следует отметить, что в общем случае поставленная вы-

---

<sup>4</sup> В цифровых системах управления непрерывными объектами рекомендуется выполнение соотношения  $T_0 < 0.05t_n$ , так как в противном случае значения непрерывного процесса между "узлами" квантования могут существенно отличаться от рассчитанной дискретной последовательности. Другим ограничением на  $T_0$  является требование подавления возмущений и помех.

ше задача не имеет точного решения. Это связано с тем, что при дискретизации входного процесса теряется информация о его значениях между узлами квантования. Следовательно, выход дискретной модели от этих значений зависеть не может, в то время как реакция исходной непрерывной системы, естественно, зависит от всех значений входного процесса. Поэтому в общем случае неизбежна алгоритмическая ошибка. Однако имеются ситуации, в которых дискретная модель, в принципе, может быть построена точно. Для этого требуется, чтобы значения процесса  $u(t)$  при  $t_{k-1} \leq t < t_k$ ,  $t_k = kT_0$  однозначно определялись последовательностью  $\{u(t_i)\}_0^{k-1}$ . Из рассмотренных выше приложений это характерно для импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией первого рода, а также для цифровых систем управления, если в качестве входного процесса рассматривается управляющее воздействие от ЭВМ. Действительно, в последнем случае исходным является дискретный процесс  $u[k]$ , который преобразуется в непрерывный входной сигнал  $u(t)$  с помощью экстраполятора. Поэтому, зная процесс  $u[k]$ , можно однозначно восстановить  $u(t)$ . Для других случаев характерна методическая ошибка. Ее значение будет тем меньше, чем медленнее изменяется входной процесс или чем меньше значение  $T_0$ .

Перейдем к изложению некоторых результатов. Описанный ниже метод применим для различных способов экстраполяции процесса  $u(t)$ . Остановимся на простейшем и наиболее распространенном случае использования *экстраполятора нулевого порядка* ("фиксатора"), для которого

$$u(t) = u(t_k) \text{ при } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t_k = kT_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

#### 6.4.2. Формулы перехода к разностным уравнениям

Рассмотрим задачу вычисления матриц  $P$ ,  $Q$ ,  $C'$ ,  $D'$  в (6.14) по заданным матрицам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в (6.13), исходя из сформулированного в п. 6.4.1. требования эквивалентности указанных систем по отношению к входному процессу  $u(t)$ . Для простоты изложения ограничимся кусочно-постоянными процессами вида (6.15). В классической теории управления известно решение этой задачи с использованием аппарата передаточных функций и  $z$ -преобразования [15, 76, 95]. В соответствии с ним передаточная функция дискретной моде-

ли  $W_D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$ , где  $\mathcal{Z}$  означает операцию  $z$ -преобразования переходной функции исходной непрерывной системы. Рассмотрим решение аналогичной задачи на основе метода пространства состояний.

Используя формулу Коши (6.9), проинтегрируем уравнение (6.13) на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ , полагая на нем  $u(t) \equiv u(t_k)$  при  $x_0 = x(t_k)$ . Получим

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B u(\tau) d\tau = \\ &= e^{AT_0} x(t_k) + \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau \right) \cdot B u(t_k). \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла введем новую переменную  $\theta \triangleq t_{k+1} - \tau$ . Тогда  $\tau = t_{k+1} - \theta$  и  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau = \int_0^{T_0} e^{A\tau} d\tau$ . Полагая вначале матрицу  $A$  невырожденной ( $\det A \neq 0$ ), получим что  $\int_0^{T_0} e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{AT_0} - \mathbf{I}_n)$ , следовательно,

$$x(t_{k+1}) = e^{AT_0} x(t_k) + A^{-1}(e^{AT_0} - \mathbf{I}_n) B u(t_k), \quad \det A \neq 0. \quad (6.16)$$

Согласно уравнению выхода в (6.13),  $y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$ . Сопоставим найденным для моментов  $t_k$  значениям непрерывного процесса значения переменных дискретной модели:  $x[k] \triangleq x(t_k)$ ,  $u[k] \triangleq u(t_k)$ ,  $y[k] \triangleq y(t_k)$ . Сравнивая уравнение (6.14) с полученным выражением (6.16), находим, что матрицы  $P$ ,  $Q$ ,  $C'$ ,  $D'$  определяются равенствами (при  $\det A \neq 0$ )

$$P = e^{AT_0}, \quad Q = A^{-1}(e^{AT_0} - \mathbf{I}_n) B, \quad C' = C, \quad D' = D. \quad (6.17)$$

Когда выполнен переход к (6.14), можно получить передаточную функцию дискретной системы по приведенной в главе 1.5. формуле:

$$W_D(z) = C(z\mathbf{I}_n - P)^{-1}Q + D. \quad (6.18)$$

Этот результат совпадает с указанным выше соотношением для  $W_D(z)$ , полученном на основе изображения переходной функции, но он основан на использовании матричных операций и уравнений состояния. Широкое применение излагаемого в настоящем параграфе метода обусловлено наличием

достаточно эффективных вычислительных алгоритмов и их программной реализации.

При выводе формулы (6.17) для матрицы  $Q$  сделано предположение о невырожденности матрицы  $A$ , которое является сильно ограничивающим. Прежде чем обсудить пути преодоления возникающих при этом трудностей, рассмотрим некоторые методы вычисления матричной экспоненты.

## 6.5. Методы вычисления матричной экспоненты

Как видно из предыдущих параграфов, матричная функция  $e^{At}$  находит широкое применение при решении различных задач теории систем; следовательно, необходимо располагать достаточно эффективными алгоритмами ее вычисления. С некоторой условностью, методы вычисления матричной экспоненты можно разбить на *точные* и *приближенные*. Точные методы предполагают получение точных выражений для матричной экспоненты через скалярные аналитические функции. Приближенные методы основаны на ее аппроксимации и содержат алгоритмическую ошибку (значение которой зависит от способа аппроксимации и параметров алгоритма).

### 6.5.1. Точные методы

Аналитическое выражение для матричной экспоненты  $e^{At}$  через скалярные элементарные функции может быть получено достаточно просто, если исходная матрица  $A$  имеет каноническую форму Жордана, т.е. система (6.13) представлена в *собственном базисе*. Не приводя эти формулы в общем виде, рассмотрим несколько важных частных случаев (см., например, [3, 47]).

1. Матрица  $A$  диагональная с вещественными собственными значениями.

Пусть  $A = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $\text{Im}s_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Непосредственным вычислением суммы ряда (6.5) получаем, что  $e^{At} = \text{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}\}$ , где  $e^{s_i t}$  – скалярные экспоненты.

2. Матрица  $A$  блочно-диагональная с мнимыми собственными значениями.

Пусть сначала  $A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$ ; значит, собственные числа чисто мнимые,  $s_{1,2} = \pm j\beta$ ,  $j^2 = -1$ . Применяя опять формулу

(6.5), убеждаемся, что справедливо выражение

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Если матрица  $A$  имеет более общую форму  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$  (собственные числа  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ), то запишем ее в виде  $A = \alpha \mathbf{I}_n + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$ . Учитывая, что единичная матрица коммутирует с любой квадратной матрицей, можем записать<sup>5</sup>

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{I}_n t} \cdot \mathbf{e}^{\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} t}.$$

Теперь, используя приведенные в пп. 1,2 результаты, окончательно получаем

$$\mathbf{e}^{At} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

3. Матрица  $A$  имеет кратные вещественные собственные значения.

Пусть  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , т.е.  $s_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Вычисляя степени этой матрицы получаем, что

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^4 = \dots = \mathbf{0}_n.^6$$

Следовательно, ряд (6.5) точно выражается конечным числом слагаемых и

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>5</sup> Следует обратить внимание на то, что выражение  $\mathbf{e}^{A+B} = \mathbf{e}^A \cdot \mathbf{e}^B$  справедливо только для коммутативных квадратных матриц, т.е. таких, что  $AB = BA$ .

<sup>6</sup> Квадратные матрицы, обладающие таким свойством, называются *нильпотентными* [53, 115]. Известно, что все их собственные числа равны нулю.

Если теперь рассмотреть более общий случай кратных вещественных собственных значений  $s_1 = s_2 = s_3 = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ , т.е. если  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ , аналогично п.2 получаем

$$\mathbf{e}^{At} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Матрица  $A$  имеет кратные мнимые собственные значения.

Пусть матрица  $A$  порядка 4 имеет вид  $A = \begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & A_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ , где  $2 \times 2$ -матрица  $A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ . Матрица  $A$  имеет кратные собственные числа  $s_{1,2} = s_{3,4} = \alpha \pm j\beta$  и имеет вещественную форму Жордана. Поступая аналогично пункту 2, представим ее в виде  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ . Очевидно, что слагаемые в этой сумме коммутируют и матричная экспонента находится произведением экспонент соответствующих матриц. Окончательно получаем

$$\mathbf{e}^{At} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t & t \cos \beta t & t \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t & -t \sin \beta t & t \cos \beta t \\ 0 & 0 & \cos \beta t & \sin \beta t \\ 0 & 0 & -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Приведенные здесь примеры показывают, что выражения для матричной экспоненты при жордановой форме матрицы имеют достаточно простой вид. В общем случае, когда

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix}, \quad \text{получим} \quad \mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\mathbf{J}_1 t} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{e}^{\mathbf{J}_l t} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_l$  – клетки Жордана.

Если исходная матрица  $A$  имеет произвольный вид, то всегда существует невырожденное преобразование с матрицей  $T$  такое, что подобная ей матрица  $\hat{A} = TAT^{-1}$  – жорданова. Тогда, по свойству 8 переходной матрицы (см. 6.1.3.),

получаем  $\mathbf{e}^{At} = T^{-1} \mathbf{e}^{\hat{A}t} T$ . Так как имеются эффективные вычислительные алгоритмы приведения к диагональной форме (особенно, если у матрицы  $A$  нет кратных собственных чисел), данный способ получения матричной экспоненты представляется достаточно удобным. Другой способ вычисления опирается на приближенное представление экспоненты и будет рассмотрен в следующем параграфе.

Аналитические формулы для матричной экспоненты могут быть получены также на основе преобразования Лапласа [3, 47, 94]. Этот метод основан на том, что резольвента  $R(s)$  постоянной матрицы  $A$  является изображением по Лапласу ее матричной экспоненты:  $\mathcal{L}(\mathbf{e}^{At}) = (s\mathbf{I}_n - A)^{-1}$  (см. сноску 10 на с. 35). Поэтому элементы переходной матрицы можно найти с помощью таблиц обратного преобразования Лапласа [15, 66, 76, 94, 95].

### 6.5.2. Приближенные методы

Приближенные методы основаны на различных аппроксимациях ряда (6.5) выражениями, содержащими конечное число слагаемых. Наиболее очевидной является *аппроксимация Тейлора порядка  $k$* , согласно которой ряд (6.5) приближенно заменяется конечной суммой

$$\mathbf{e}^{A\tau} \approx \mathbf{I}_n + A\tau + \frac{(A\tau)^2}{2} + \dots + \frac{(A\tau)^k}{k!} \equiv \mathbf{I}_n + \sum_{i=1}^k \frac{(A\tau)^i}{i!}. \quad (6.19)$$

Например, при  $k = 1$  получаем линейное приближение

$$\mathbf{e}^{A\tau} \approx \mathbf{I}_n + A\tau, \quad (6.20)$$

которое будем называть *аппроксимацией Эйлера*<sup>7</sup>.

Аппроксимация (6.19) не является наилучшей. Во многих отношениях более предпочтительна более общая *аппроксимация Паде*. При такой аппроксимации экспонента  $e^x$  представляется рациональной функцией  $e^x \approx \frac{F_{\mu\nu}(x)}{G_{\mu\nu}(x)}$  с числителем  $F_{\mu\nu}$  степени  $\mu$  и знаменателем  $G_{\mu\nu}$  степени  $\nu$ , определяемыми

<sup>7</sup> Обоснование такого названия следует из приведенной ниже в п. 6.10.2. аналогии с численным решением дифференциальных уравнений.

формулами

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(x) &= 1 + \frac{\mu}{(\mu+\nu)1!}x + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots \\
&+ \frac{\mu(\mu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\nu+1)\mu!}x^\mu, \\
G_{\mu\nu}(x) &= 1 - \frac{\nu}{(\mu+\nu)1!}x + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots \\
&+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\mu+1)\nu!}x^\nu.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Соответственно, для матричного аргумента  $x = A\tau$  запишем

$$\mathbf{e}^{A\tau} \approx F_{\mu\nu}(A\tau)G_{\mu\nu}^{-1}(A\tau), \tag{6.22}$$

где  $F_{\mu\nu}(A\tau)$ ,  $G_{\mu\nu}(A\tau)$  – матричные многочлены вида (6.21). В дальнейшем (6.22) будем называть *аппроксимацией Паде*  $(\mu, \nu)$ .

Приведем некоторые частные случаи (6.22). Прежде всего отметим, что аппроксимация Тейлора (6.19) является частным случаем (6.22) при  $\nu = 0$ . Следовательно, формула метода Эйлера (6.20) совпадает с аппроксимацией Паде  $(1, 0)$ . Аппроксимация Паде  $(0, 1)$  имеет вид

$$\mathbf{e}^{A\tau} \approx (\mathbf{I}_n - A\tau)^{-1} \tag{6.23}$$

и в дальнейшем будет называться *неявным методом Эйлера*.

Аппроксимация Паде  $(1, 1)$  соответствует *методу Тастина* (см. также с. 153) и определяется формулой

$$\mathbf{e}^{A\tau} \approx (\mathbf{I}_n + A\tau/2)(\mathbf{I}_n - A\tau/2)^{-1}, \tag{6.24}$$

Формула Паде  $(2, 2)$  дает выражение

$$\mathbf{e}^{A\tau} \approx (12\mathbf{I}_n + 6A\tau + (A\tau)^2)(12\mathbf{I}_n - 6A\tau + (A\tau)^2)^{-1}. \tag{6.25}$$

Наконец, формула Паде  $(3, 3)$  приводит к соотношению (6.22), где

$$\begin{aligned}
F_{3,3}(A\tau) &= 120\mathbf{I}_n + 60A\tau + 12(A\tau)^2 + (A\tau)^3, \\
G_{3,3}(A\tau) &= 120\mathbf{I}_n - 60A\tau + 12(A\tau)^2 - (A\tau)^3.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Одним из преимуществ аппроксимаций Паде является их более высокая точность, чем соответствующих (при  $k = \max(\mu, \nu)$ ) аппроксимаций Тейлора. Ошибка аппроксимации (6.19) имеет порядок малости  $O(\tau^k)$ , а ошибка "диагональных" аппроксимаций (6.22)  $(\mu, \nu)$  при  $\mu = \nu$  – порядок малости  $O(\tau^{2\mu+1})$ . Другим достоинством формулы Паде при  $\nu \neq 0$  является сохранение свойства устойчивости непрерывной системы при переходе к дискретной модели.<sup>8</sup> Недостатком неявных методов является необходимость обращения матрицы  $G_{\mu\nu}(A\tau)$  и связанная с этим проблема ее вырожденности. Следует, однако, иметь в виду, что существуют достаточно эффективные алгоритмы обращения матриц и возникающие здесь дополнительные вычислительные затраты обычно оправданы. Что же касается возможной вырожденности матрицы  $G$ , то заметим, что она имеет место, если у матрицы  $A$  есть собственные числа, совпадающие с корнями  $\gamma_j$  многочлена  $G_{\mu\nu}(\gamma)$ . Из (6.21) можно вывести, что при  $\mu = \nu$  выполнено  $\operatorname{Re}\gamma_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ . Следовательно, для устойчивых непрерывных систем всегда выполнено  $\det G_{\mu\nu}(A\tau) \neq 0$ . Если же система неустойчива, то при вырожденности матрицы  $G$  следует использовать аппроксимацию с другими параметрами  $\mu, \nu$ , либо несколько изменить значение  $\tau$ . Заметим что при  $\tau \rightarrow 0$   $G_{\mu\nu}(A\tau) \rightarrow \mathbf{I}_n$ , следовательно, выбор достаточно малого  $\tau$  гарантирует  $\det G_{\mu\nu}(A\tau) \neq 0$ .

При вычислении матричной экспоненты может оказаться полезным предварительное определение ее на малом интервале  $\tau$  по формулам (6.19) или (6.22) (что дает высокую точность) с последующим рекуррентным возведением в степень полученного результата (*метод Ракитского*) [72]. Здесь используется свойство  $\mathbf{e}^{AT_0} = (\mathbf{e}^{A\tau})^k$  при  $T_0 = k\tau$ .

Предлагается также при определении высоких степеней матрицы  $A$  пользоваться теоремой Кэли–Гамильтона [53], согласно которой каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Поэтому

$$A^n = -(a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n \mathbf{I}_n),$$

где  $a_i$  – коэффициенты характеристического многочлена

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n.$$

Свойства дискретных моделей, основанных на приближенных методах вычислений  $\mathbf{e}^{A\tau}$ , а также некоторые применения

---

<sup>8</sup> Более подробно этот вопрос обсуждается ниже в п. 6.10.

приведенных соотношений будут рассмотрены ниже в п.п. 6.7. 6.10. Сейчас более подробно рассмотрим вопрос вычисления матрицы  $Q$  в (6.14), обращая внимание на возможность  $\det A = 0$ .

### 6.6. Вычисление матрицы $Q$ в общем случае

Напомним, что формула (6.17) для вычисления матрицы  $Q$  применима, если  $\det A \neq 0$ . Трудностей, связанных с вычислением  $Q$  при вырожденной матрице  $A$ , можно избежать, если при формальной подстановке выражения для  $P = e^{AT_0}$ , полученного из аппроксимаций Тейлора (6.19) или Паде (6.22), в (6.17) произвести "сокращение" матрицы  $A$ . Тогда в выражение для  $Q$  матрица  $A^{-1}$  входить не будет. Например, аппроксимация по методу Эйлера (6.20)  $P = \mathbf{I}_n + AT_0$  приводит к формуле  $Q = BT_0$ , а аппроксимация Паде (1,1) (6.24) ("метод Тастина") – к формуле  $Q = (\mathbf{I}_n - AT_0/2)^{-1}BT_0$ .

Другой способ состоит в расширении уравнений состояния исходной системы (6.13). Входной процесс  $u(t)$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$  рассматривается как решение некоторого однородного дифференциального уравнения. Тогда расширенная система тоже является однородной и в вычислении по (6.17) нет необходимости. Искомые матрицы  $P$  и  $Q$  получаются как подматрицы "расширенной" матричной экспоненты.

Продемонстрируем этот подход для ступенчатого входного процесса  $u(t) = u(t_k)$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Для указанного промежутка времени уравнение (6.13) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_k) &= x[k], & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ \dot{u}(t) &= 0, & u(t_k) &= u[k]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Введем расширенный  $(n+m)$ -мерный вектор состояния  $\bar{x}(t) = \text{col}\{x(t), u(t)\}$  и  $(n+m) \times (n+m)$ - матрицу

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (6.27) представим в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_k) = \text{col}\{x[k], u[k]\}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (6.28)$$

Соответствующая дискретная модель (аналогично (6.14)) принимает вид

$$\bar{x}[k+1] = \bar{P}\bar{x}[k], \quad (6.29)$$

где  $\bar{P} = e^{\bar{A}T_0}$ . Учитывая структуру матрицы  $\bar{A}$  и формулу (6.5) для  $\bar{P}$ , непосредственно убеждаемся, что матрица  $\bar{P}$  имеет следующую блочную структуру:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

С учетом этого из (6.29) находим, что

$$x[k+1] = P'x[k] + Q'u[k]. \quad (6.30)$$

Сравнивая (6.30) с (6.14), видим, что матрицы  $P$ ,  $Q$  в (6.14) совпадают с  $P'$ ,  $Q'$ . Поэтому они могут быть получены,<sup>9</sup> как соответствующие подматрицы матрицы  $\bar{P} = e^{\bar{A}T_0}$ .

Отметим также, что при использовании описанных в п. 6.5.1. аналитических методов, основанных на приведении матрицы  $A$  к канонической жордановой форме, в вычислении  $Q$  по формуле (6.17) нет необходимости. В этом случае интеграл от матричной экспоненты в (6.9) может быть найден аналитически и представлен элементарными функциями.

## 6.7. Дискретные модели для различных видов входного процесса

Выше основные результаты по переходу к дискретным моделям получены для систем с экстраполятором нулевого порядка. Для таких систем выполнено (6.15). Рассмотрим некоторые обобщения результатов п. 6.4.2. для других видов входного процесса. Требование однозначности определения процесса  $u(t)$  по последовательности  $\{u(t_i)\}_0^{k-1}$  будем по-прежнему считать выполненным.

### 6.7.1. Смещенное $z$ -преобразование

В ряде приложений представляет интерес получение дискретной модели системы, в которой значения  $x[k]$ ,  $y[k]$  соответствуют состоянию и выходу непрерывной системы не в моменты времени  $t_k = kT_0$  (как указано в 6.4.1.), а в моменты

<sup>9</sup> Отметим, что данный метод вычислений реализован в программе **c2d** тулбокса CONTROL SYSTEMS пакета MATLAB [139].

$t_{k,\varepsilon} \triangleq (k + \varepsilon)T_0$ ,  $0 \leq \varepsilon < 1$ .<sup>10</sup> Итак, полагая, как и ранее, входное воздействие кусочно-постоянным вида (6.15), получим разностные уравнения, описывающие переход от состояния  $x(t_{k,\varepsilon})$  к состоянию  $x(t_{k+1,\varepsilon})$  при известном  $u(t)$ ,  $t_{k,\varepsilon} \leq t < t_{k+1,\varepsilon}$ . Для этого, как и в 6.4.2., проинтегрируем уравнение (6.13) на интервале  $[t_{k,\varepsilon}, t_{k+1,\varepsilon}]$  по формуле (6.9). Получим

$$\begin{aligned} x(t_{k+1,\varepsilon}) &= e^{A(t_{k+1,\varepsilon}-t_{k,\varepsilon})}x(t_{k,\varepsilon}) + \int_{t_{k,\varepsilon}}^{t_{k+1,\varepsilon}} e^{A(t_{k+1,\varepsilon}-\tau)} \cdot Bu(\tau)d\tau = \\ &= e^{AT_0}x(t_{k,\varepsilon}) + \int_{t_{k,\varepsilon}}^{t_{k+1,\varepsilon}} e^{A(t_{k+1,\varepsilon}-\tau)}d\tau \cdot Bu(t_k) + \\ &+ \int_{t_{k+1}}^{t_{k+1,\varepsilon}} e^{A(t_{k+1,\varepsilon}-\tau)}d\tau \cdot Bu(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, получаем аналогичное (6.16) уравнение

$$\begin{aligned} x(t_{k+1,\varepsilon}) &= Px(t_{k,\varepsilon}) + Q_1u(t_k) + Q_2u(t_{k+1}), \\ y(t_{k,\varepsilon}) &= Cx(t_{k,\varepsilon}) + Du(t_k), \end{aligned}$$

где по-прежнему  $P = e^{AT_0}$ ; матрицы  $Q_1$ ,  $Q_2$  при  $\det A \neq 0$  определяются соотношениями

$$Q_1 = A^{-1}(P - P_\varepsilon), \quad Q_2 = A^{-1}(\mathbf{I}_n - P_\varepsilon), \quad P_\varepsilon = e^{AT_0\varepsilon}.$$

Обозначив  $x[k] \triangleq x(t_{k,\varepsilon})$ ,  $y[k] \triangleq y(t_{k,\varepsilon})$ , получим разностное уравнение

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Px[k] + Q_1u[k] + Q_2u[k+1], \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.31)$$

Отсюда передаточная функция дискретной модели получается в виде  $W_D(z, \varepsilon) = C(z\mathbf{I}_n - P)^{-1} \cdot (Q_1 + Q_2z) + D$ .

Прежде чем обратиться к вычислению  $Q_1$ ,  $Q_2$  в общем случае, заметим, что уравнение (6.31) не имеет стандартного вида (6.14). Для устранения возникающих при этом неудобств выполним преобразование (6.31) к виду (6.14). Обозначив  $\tilde{x}[k] \triangleq x[k] - Q_2u[k]$ , получим  $x[k] = \tilde{x}[k] + Q_2u[k]$  и

<sup>10</sup> Рассмотренная в 6.4.1. задача является частным случаем данной при  $\varepsilon = 0$ . Обычно данная задача называется определением "смещенного  $z$ -преобразования".

$\tilde{x}[k+1] = P\tilde{x}[k] + (PQ_2 + Q_1)u[k]$ ,  $y[k] = C\tilde{x}[k] + (CQ_2 + D)u[k]$ .  
 Данное уравнение имеет вид (6.14), где

$$P = e^{AT_0}, \quad Q = PQ_2 + Q_1, \quad C' = C, \quad D' = CQ_2 + D.$$

При вычислении матриц  $Q_1$ ,  $Q_2$  можно использовать метод, описанный в п. 6.6. Для этого получим  $x(t_{k+1,\varepsilon})$ , последовательно интегрируя уравнение (6.27) на интервале  $[t_{k,\varepsilon}, t_{k+1}]$  при начальных условиях  $x(t_{k,\varepsilon}) = x[k]$ ,  $u(t_{k,\varepsilon}) = u[k]$  и на интервале  $[t_{k+1}, t_{k+1,\varepsilon}]$  при начальном значении  $x(t_{k+1})$ , полученном на конце первого интервала, взяв  $u(t_{k+1}) = u[k+1]$ . В результате получаем разностное уравнение

$$x[k+1] = Px[k] + P_\varepsilon Q_{1-\varepsilon} u[k] + Q_\varepsilon u[k+1],$$

где  $P_{\varepsilon_1}$ ,  $Q_{\varepsilon_1}$ ,  $Q_{1-\varepsilon}$  – соответствующие подматрицы матриц  $\tilde{P}_\varepsilon = e^{AT_0\varepsilon}$ ,  $\tilde{P}_\varepsilon = e^{AT_0(1-\varepsilon)}$ . Вычисления можно упростить, если учесть, что  $P = P_\varepsilon P_{1-\varepsilon}$ .

### 6.7.2. Прямоугольные импульсы

Пусть теперь входное воздействие имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u(t_k) & \text{при } t_k \leq t \leq t_{k,\gamma}, \\ 0 & \text{при } t_{k,\gamma} < t \leq kT_0, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.32)$$

где  $0 < \gamma \leq 1$  – *скважность* входного воздействия,  $t_{k,\gamma} \triangleq (k + \gamma)T_0$ .<sup>11</sup> Снова приведем уравнения состояния системы к виду (6.27). Проинтегрируем их на интервале  $[t_k, t_{k,\gamma}]$  при начальных условиях  $x(t_k) = x[k]$ ,  $u(t_{k,\gamma}) = u[k]$  и на интервале  $[t_{k,\gamma}, t_{k+1}]$ , при начальном значении  $x(t_{k,\gamma})$ , полученном на конце первого интервала и  $u(t_{k,\gamma}) = 0$ . Аналогично 6.6. 6.7.1. получаем разностное уравнение

$$x[k+1] = Px[k] + P_{1-\gamma} Q_\gamma u[k], \quad y[k] = Cx[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.33)$$

где  $P_{1-\gamma}$ ,  $Q_\gamma$  – соответствующие подматрицы матриц  $\tilde{P}_{1-\gamma} = e^{\tilde{A}T_0(1-\gamma)}$ ,  $\tilde{P}_\gamma = e^{\tilde{A}T_0\gamma}$ .

<sup>11</sup> Входной процесс вида (6.15), рассмотренный в 6.4.2. является частным случаем (6.32) при  $\gamma = 1$ .

### 6.7.3. Экспоненциальные импульсы

Получим дискретную модель системы при входном воздействии вида

$$u(t) = u(t_k)e^{-\alpha(t-t_k)} \text{ при } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.34)$$

где  $\alpha$  – параметр экстраполятора. Как и в 6.6., получим уравнения расширенной системы, которые в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_k) &= x[k], & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ \dot{u}(t) &= -\alpha u(t), & u(t_k) &= u[k]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Аналогично 6.6., вычисляя матричную экспоненту  $e^{\tilde{A}T_0}$ , находим, что матрица  $\tilde{P}$  расширенной системы принимает вид

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ \mathbf{0} & e^{-\alpha T_0} \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

Приравнивая  $P = P'$ ,  $Q = Q'$ , получаем искомые матрицы дискретной модели (6.14).

### 6.7.4. Треугольные импульсы

Рассмотрим теперь входной процесс, имеющий вид прямоугольных треугольников с высотой  $u(t_k)$  и основанием  $T_0\gamma$ . Он описывается уравнением

$$u(t) = \begin{cases} u(t_k) \left(1 - \frac{t-t_k}{\gamma T_0}\right) & \text{при } t_k \leq t \leq t_{k,\gamma}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{при } t_{k,\gamma} < t \leq kT_0, \end{cases} \quad (6.36)$$

где  $t_{k,\gamma} = (k + \gamma)T_0$ . Значения  $x(t_k)$  можно вычислить непосредственно, интегрируя (6.13) с учетом (6.36); однако чтобы избежать обращения матрицы  $A$ , воспользуемся описанным в 6.6. приемом.

Для  $t_k \leq t \leq t_{k,\gamma}$  запишем (6.36) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_k) &= x[k], & t_k \leq t \leq t_{k,\gamma} \\ \dot{u}(t) &= v(t), & u(t_k) &= u[k], \\ \dot{v}(t) &= 0, & v(t_k) &= -u[k](\gamma T_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Поступая аналогично п.п. 6.6. 6.7.2. введем расширенный  $(n + 2m)$ -мерный вектор состояния  $\bar{x}(t) \triangleq \text{col}\{x(t), u(t), v(t)\}$  и  $(n + 2m) \times (n + 2m)$ -матрицу

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Интеригуя расширенное однородное уравнение (6.37) на интервале  $t \in [t_k, t_{k,\gamma}]$ , получим дискретную модель с матрицей  $\bar{P}$  вида

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_\gamma & Q_{1,\gamma} & Q_{2,\gamma} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{I}_m & \mathbf{I}_m \gamma T_0 \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

Отсюда определяем значение

$$x(t_{k,\gamma}) = P_\gamma x(t_k) + Q_{1,\gamma} u(t_k) + Q_{2,\gamma} v(t_k) = P_\gamma x(t_k) + Q_{1,\gamma} u(t_k) - Q_{2,\gamma} u(t_k) (\gamma T_0)^{-1} = P_\gamma x(t_k) + (Q_{1,\gamma} - Q_{2,\gamma} (\gamma T_0)^{-1}) u(t_k).$$

Обозначив  $Q_\gamma \triangleq (Q_{1,\gamma} - Q_{2,\gamma} (\gamma T_0)^{-1})$ , получим выражение для  $x(t_{k,\gamma})$ :  $x(t_{k,\gamma}) = P_\gamma x(t_k) + Q_\gamma u(t_k)$ .

Для  $t_{k,\gamma} < t < t_{k+1}$ , (6.36) принимает вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t_{k,\gamma} < t < t_{k+1},$$

следовательно,  $x(t_k) = P_{1-\gamma} x(t_{k,\gamma})$ .

Объединяя полученные выражения, получим разностное уравнение для  $x[k]$  вида (6.14), где матрицы

$$P = e^{AT_0}, \quad Q = P_{1-\gamma} Q_\gamma.$$

В работе [76] показано применение формулы Коши при построении дискретных моделей для систем с произвольно заданной формой импульса. Решение задачи сводится к вычислению матричной экспоненты  $e^{AT_0}$  и интеграла  $\int_0^{T_0} e^{A(T_0-\tau)} \phi(\tau) d\tau$ , где функция  $\phi(\cdot)$  определяет вид импульсов, образующих входной процесс.

## 6.8. Подстановочные формулы для вычисления передаточной функции дискретной модели

Выше, в 6.4.2. приведена формула (6.18), позволяющая вычислить передаточную функцию дискретной системы по разностному уравнению (6.14), полученному преобразованием уравнений состояния непрерывной системы (6.13). Если исходная система задана передаточной функцией  $W(s)$ , то такой подход

предполагает предварительное приведение  $W(s)$  к уравнениям состояния. Для этого можно использовать описанные в 4. процедуры. Однако можно получить приближенное решение задачи, при котором искомая функция  $W_D(z)$  определяется непосредственной заменой аргумента  $s$  в  $W(s)$ . Эти формулы основаны на "линейных" аппроксимациях Паде  $(\mu, \nu)$ , в которых значения  $\mu$  и  $\nu$  не превосходят единицы.

Вначале используем формулу (6.20). В соответствии с ней в (6.18) следует подставить  $P = \mathbf{I}_n + AT_0$  и, как отмечено в п. 6.6.  $Q = BT_0$ . Отсюда получим

$$\begin{aligned} W_D(z) &= C(z\mathbf{I}_n - P)^{-1}Q = C(z\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n - AT_0)^{-1}BT_0 = \\ &= C\left(\frac{z-1}{T_0}\mathbf{I}_n - A\right)^{-1}B. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с известной формулой  $W(s) = C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B$ , убеждаемся, что  $W_D(z)$  можно приближенно получить из  $W(s)$  заменой аргумента

$$W_D(z) = W(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T_0}}. \quad (6.38)$$

Если теперь применить формулу неявного метода Эйлера (6.23), то аналогично получаем

$$W_D(z) = \frac{1}{z} \cdot W(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{zT_0}}. \quad (6.39)$$

Наконец, аппроксимация (6.24) (Паде  $(1, 1)$ ) после несложных преобразований приводит к подстановке метода Тастина:

$$W_D(z) = \frac{2}{z+1} \cdot W(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}}. \quad (6.40)$$

Точность этих методов зависит от соотношения между интервалом  $T_0$  и наименьшей постоянной времени непрерывной системы  $W(s)$ . При разумном выборе  $T_0$  точность может оказаться достаточно высокой. Кроме того, как будет показано в п. 6.10. формулы (6.39) и (6.40) сохраняют свойство устойчивости модели при любом (а не только при достаточно малом)  $T_0 > 0$ .

Интересно рассмотреть псевдочастотные характеристики полученных таким способом передаточных функций дискретных систем. Как известно, эти характеристики получают-ся  $w$ -преобразованием  $W_D(z)$  и последующей подстановкой  $w = \frac{T_0}{2} \cdot j\lambda$ , где  $j^2 = -1$ , а  $\lambda \in [0, \infty)$  – псевдочастота [15, 66, 76, 95]. Поскольку, согласно  $w$ -преобразованию,  $\frac{z-1}{z+1} = w$ , а  $\frac{2}{z+1} = 1-w$ , из формулы (6.40) получаем выражение

$$W_D(j\lambda) = \left(1 - \frac{T_0}{2}j\lambda\right) \cdot W(j\lambda).$$

Таким образом, псевдочастотные характеристики дискретной системы приближенно могут быть построены непосредственно по частотным характеристикам исходной непрерывной системы с введением дополнительного отрицательного фазового сдвига  $\Delta\varphi(\lambda) = -\arctg\frac{T_0}{2}\lambda$  и изменением коэффициента передачи в  $\sqrt{1 + \frac{T_0^2}{4}\lambda^2}$  раз. Этот подход, хоть и является приближенным, позволяет учесть влияние квантования по времени в дискретной системе и вместе с тем использовать хорошо разработанные процедуры синтеза непрерывных систем управления для получения ”непрерывных моделей” цифровых регуляторов. Точность данного метода определяется соотношением между частотой среза  $\omega_c$  непрерывной модели (найденной с учетом указанной поправки) и интервалом квантования сигнала управления  $T_0$ . На этапе предварительного синтеза можно рекомендовать выполнение соотношения  $T_0 \leq 0.3\omega_c^{-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** К подстановочным методам приближенного перехода от  $W(s)$  к  $W_D(z)$  относятся также методы, основанные на соотношении  $z_i = e^{s_i T_0}$  между полюсами непрерывной системы  $s_i$  и ее дискретной модели  $z_i$ . Действительно, сравнивая формулы для фундаментальных составляющих решений однородного дифференциального и разностного уравнений ( $y_i(t) = P(t)e^{s_i t}$  и  $y_i[k] = P_D[k]z_i^k$  соответственно),<sup>12</sup> убеждаемся, что  $y(kT_0) \equiv y[k]$  возможно, если  $z_i = e^{s_i T_0}$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Следовательно, передаточные функции  $W(s)$  и  $W_D(z)$  должны иметь указанную связь

<sup>12</sup> Здесь  $P(t)$ ,  $P_D[k]$  – многочлены степеней, соответствующих кратностям  $s_i$ ,  $z_i$ .

между полюсами  $s_i$  и  $z_i$ . Для числителей передаточных функций это соотношение не выполняется. Однако при достаточно малом  $T_0$  его можно приближенно распространить и на нули передаточных функций. Тогда получаем подстановочную формулу  $W_D(z) = W(s) \Big|_{s = \frac{1}{T_0} \ln z}$ . Чтобы  $W_D(z)$  была отно-

шением многочленов от  $z$ , используется приближенное представление  $\ln z$ . Например, можно использовать аппроксимации  $\ln z \approx z - 1$ ,  $\ln z \approx \frac{z-1}{z}$  или  $\ln z \approx 2 \frac{z-1}{z+1}$ . Последняя

аппроксимация приводит к формуле  $W_D(z) = W\left(\frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)$ ,

известной в литературе как *метод Тастина*. Полученная на с. 151 формула (6.40) отличается от указанной множителем  $\frac{2}{z+1}$ , позволяющем учесть характерное для дискретных систем фазовое запаздывание.

### 6.9. Приведение уравнений многочастотных непрерывно-дискретных систем к одночастотным моделям

Многие системы управления приводами, движущимися объектами, технологическими процессами и т.д. построены с применением *многочастотных цифровых регуляторов*. Такие регуляторы имеют различные интервалы дискретности в разных контурах управления. Исследование систем с многочастотными регуляторами затруднено из-за сложности перехода к единому математическому описанию, в котором бы сохранялась специфика системы. Актуальна задача получения модели системы в виде стандартных разностных уравнений состояния (1.5) или передаточной функции  $W_D(z)$ . Некоторые способы решения этой задачи изложены в данном параграфе [117, 118]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением стационарных линейных непрерывно-дискретных систем с кратными частотами квантования. Это означает, что интервалы квантования  $T_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  – число различных периодов дискретности) таковы что среди них имеется наибольший период дискретности  $T_0$  для которого выполнено  $T_0 = c_j T_j$  при некоторых натуральных числах  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Заметим, что интервалы  $T_j$  связаны с частотами квантования  $f_j$  соотношениями  $T_j = \frac{1}{f_j}$ , поэтому можно

вести наименьшую частоту квантования  $f_0 \triangleq \frac{1}{T_0}$ . Далее рассмотрим задачу получения уравнений состояния и передаточных функций модели, полученной приведением уравнений системы к периоду  $T_0$ . Эта модель должна учитывать наличие контуров регулирования, в которых происходит преобразование сигнала с большими частотами  $f_j = c_j f_0$ .

### 6.9.1. Метод аналитических преобразований

Рассмотрим сначала непрерывную систему, заданную уравнениями состояния

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t), \quad y_1(t) = C_1x_1(t), \quad (6.41)$$

где  $x_1(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – векторы и матрицы соответствующих размеров, а входной процесс  $u_1(t)$  определяется выражением  $u_1(t) = Ky_1(t) + g_1(k_1T_1)$ , где  $k_1 = E(t/T_1)$ ,  $g(t)$  – внешнее воздействие,  $T_1 = \text{const}$  – интервал дискретности, а через  $E(\cdot)$  обозначена функция вычисления целой части числа. Таким образом, рассматривается непрерывная система (6.41), замкнутая непрерывным регулятором в обратной связи, на вход которой аддитивно с управлением поступает кусочно-постоянное на интервалах длительности  $T_1$  входное воздействие. Уравнения замкнутой системы с учетом обратной связи имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = (A + BK)x_1(t) + Bg_1(t_{k_1}), \quad y_1(t) = Cx_1(t). \quad (6.42)$$

Для найденной системы выполним переход к дискретной модели относительно моментов  $t_{k_1}$  по описанной в п. 6.4.2. процедуре. Получим разностные уравнения:

$$x_1[k_1 + 1] = P_1x_1[k_1] + Q_1g_1[k_1], \quad y_1[k_1] = Cx_1[k_1], \quad (6.43)$$

где  $P_1 = e^{(A+BK)T_1}$ . Пусть теперь входной процесс  $g_1(t_{k_1})$  поступает с выхода экстраполятора нулевого порядка на период  $T_1$  (следовательно, в моменты  $t_{k_1}$   $g_1(t_{k_1})$  совпадают с  $g_1[k_1]$ ) и является выходом дискретной подсистемы, заданной уравнениями

$$x'_1[k_1 + 1] = P'_1x'_1[k_1] + Q'_1g_2[k_1], \quad g_1[k_1] = C'_1x'_1[k_1], \quad (6.44)$$

со входным воздействием  $g_2$ . Определим общий вектор состояния  $\bar{x}[k_1] \triangleq \text{col}\{x_1[k_1], x_1'[k_1]\}$ . Как нетрудно убедиться, уравнения (6.43), (6.44) можно объединить в одно уравнение:

$$\bar{x}_1[k_1 + 1] = \bar{P}_1 \bar{x}_1[k_1] + \bar{Q}_1 g_2[k_1], \quad y_1[k_1] = \bar{C}_1 \bar{x}_1[k_1], \quad (6.45)$$

в котором матрицы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{C}_1$  имеют вид

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 C_1' \\ \mathbf{0} & P_1' \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Q_1' \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = [C; \mathbf{0}].$$

Далее, пусть процесс  $g_2[k_1]$  принимает постоянные значения на промежутках  $[t_{k_2}, t_{k_2} + T_0]$ , где интервал квантования  $T_0 = dT_1$  для некоторого постоянного натурального  $d$ . Следовательно, в течение каждых  $d$  интервалов длительности  $T_1$  (отсчитывая от моментов  $t_{k_2} = T_0 k_2$ ,  $k_2 = 0, 1, 2, \dots$ ) значение  $g_2[k_1] = g_2[k_2]$ , где  $k_1 = E(t/T_1)$ ,  $k_2 = E(t/T_0)$ . Найдем значение  $\bar{x}_1[k_2 + 1]$  по  $\bar{x}_1[k_2]$ , используя уравнение (6.45) с учетом того, что при  $k_1, k_1 + 1, \dots, k_1 + d$  входной сигнал  $g_2[k_1]$  не изменяется. Последовательно применяя формулу (6.45), получим

$$\begin{aligned} \bar{x}_1[k_1 + 2] &= \bar{P}_1 \bar{x}_1[k_1 + 1] + \bar{Q}_1 g_2[k_1] = \bar{P}_1 (\bar{P}_1 \bar{x}_1[k_1] + \bar{Q}_1 g_2[k_1]) + \bar{Q}_1 g_2[k_1] = \\ &= \bar{P}_1^2 \bar{x}_1[k_1] + (\bar{P}_1 + \mathbf{I}) \bar{Q}_1 g_2[k_1], \\ &\quad \dots \\ \bar{x}_1[k_2 + 1] &= \bar{P}_1^d \bar{x}_1[k_2] + (\bar{P}_1^{d-1} + \dots + \bar{P}_1 + \mathbf{I}) \bar{Q}_1 g_2[k_2]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем разностные уравнения состояния, определяющие поведение рассмотренной непрерывно-дискретной системы относительно моментов  $k_2 T_0$ . Перепишем их в виде

$$\bar{x}_1[k_2 + 1] = \bar{P}'_1 \bar{x}_1[k_2] + \bar{Q}'_1 g_2[k_2], \quad y_1[k_2] = \bar{C}_1 \bar{x}_1[k_2], \quad (6.46)$$

где  $\bar{P}'_1 = \bar{P}_1^d$ ,  $\bar{Q}'_1 = (\bar{P}_1^{d-1} + \dots + \bar{P}_1 + \mathbf{I}) \bar{Q}_1$ ,  $\bar{C}_1 = [C; \mathbf{0}]$ . Положим теперь, что процесс  $g_2[k_2]$  формируется дискретной системой с интервалом квантования  $T_0$ , уравнения которой имеют вид

$$x_2[k_2 + 1] = P_2 x_2[k_2] + Q_2 g[k_2], \quad g_2[k_2] = C_2 x_2[k_2], \quad (6.47)$$

Как и выше, введем общий вектор состояния  $\bar{x}[k_2] \triangleq \text{col}\{\bar{x}_1[k_2], x_2[k_2]\}$  и запишем уравнения состояния системы (6.46), (6.47) в виде

$$\bar{x}[k_2 + 1] = P \bar{x}[k_2] + Q g[k_2], \quad y[k_2] = C \bar{x}[k_2], \quad (6.48)$$

в которой матрицы  $P$ ,  $Q$ ,  $C$  имеют блочную структуру:

$$P = \begin{bmatrix} \bar{P}'_1 & \bar{Q}'_1 C_2 \\ \mathbf{0} & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad C = [\bar{C}_1; \mathbf{0}].$$

Таким образом, найдены уравнения состояния дискретной системы с наибольшим периодом дискретности  $T_0$ . Процесс преобразования матриц можно продолжить, если имеются другие дискретные подсистемы с интервалами квантования, кратными  $T_0$ . Полученные уравнения можно использовать для нахождения передаточной функции системы (6.48), определения частотных характеристик и исследования ее устойчивости.

### 6.9.2. Метод моделирования

Излагаемый здесь метод решения поставленной задачи сводится к приведению модели системы к виду (6.14) путем расчета переходной функции. Для простых задач решение может быть получено аналитически, однако, как правило, приходится прибегать к численному интегрированию. Предлагаемый ниже подход показывает возможность использования программ моделирования для получения единого описания непрерывно-дискретных систем. За начальные точки отсчета примем моменты времени  $t_k = kT_0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и рассмотрим промежутки  $[t_k, t_{k+1}]$ . Учитывая стационарность системы, для этих промежутков можно принять  $t_k = 0$  и в дальнейшем рассматривать промежуток  $[0, T_0]$ . Выделим внутри него моменты времени  $t_{jr}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $r = 1, 2, \dots, d_j$ ), в которые изменяется состояние  $j$ -й дискретной подсистемы. Они образуют последовательности  $t_{jr} = t_{j0} + rT_j$ , где  $t_{j0} \leq T_j$  — “начальные фазы” для каждой подсистемы. Существенно то, что для всех  $k$  вид этих последовательностей одинаков в силу постоянства  $T_j$  и кратности частот квантования. Следовательно, оператор  $\mathcal{S}$  в уравнении состояние-вход-выход системы  $y(t) = \mathcal{S}(x(t_0); u_{[t_0, t]})$  стационарный. Кроме того, он будет и линейным вследствие линейности каждой подсистемы. Поскольку нас интересуют уравнения системы относительно моментов  $kT_0$ , будем дополнительно предполагать, что значения  $u(t_k)$  однозначно определяют вид  $u(t)$  внутри каждого промежутка  $[t_k, t_{k+1}]$  (см. выше 6.4.2. 6.7.). Поэтому относительно моментов  $t_k$  рассматриваемая система может быть

описана разностными уравнениями состояния

$$x[k+1] = Px[k] + Qu[k], \quad y[k] = Cx[k] + Du[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.49)$$

Определив значения матриц  $P$ ,  $Q$ ,  $C$ ,  $D$ , мы получим решение поставленной задачи. Для этого учтем, что решение разностного уравнения (6.49) по аналогии с (6.8) имеет вид

$$x[k] = \Phi[k]x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi[k-j-1]Bu[j], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.50)$$

в котором *переходная матрица*  $\Phi[k]$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi[k+1] = P\Phi[k], \quad \Phi[0] = \mathbf{I}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.51)$$

Из (6.51) видим, что  $P = \Phi[1]$ . Полагая  $u[k] \equiv 0$ , получим из (6.50), что  $x_i[1] = \Phi[1]x_i[0]$ , где  $x_i[0] = \mathbf{e}_i \triangleq [0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0]^T$ .

Следовательно,  $x_i[1]$  есть  $i$ -й столбец матрицы  $\Phi[1]$  и, следовательно, искомой матрицы  $P$ . Циклически выполняя вычисления для  $i = 1, 2, \dots, n$ , найдем все столбцы матрицы  $P$ . Таким образом, для получения  $P$  можно  $n$  раз промоделировать исследуемую систему на промежутке  $[0, T_0]$  при единичных начальных условиях. Для вычисления матрицы  $Q$  положим  $x[0] = 0$ ,  $u_i[k] \equiv \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно,  $B = [x_1[1]:x_2[1]:\dots:x_m[1]]$ . Вычисление  $x_i[1]$  выполняется моделированием системы при нулевых начальных условиях и единичных входах циклически для  $i = 1, 2, \dots, m$ . Вычисление матрицы  $C$  производится по столбцам  $C = [y_1:y_2:\dots:y_n]$ ,  $y_i$  – выход системы при  $u = 0$ ,  $x_i = \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 0$ . Для определения матрицы  $D$  следует получить выход при  $x = 0$ ,  $u_i = \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 0$ . Заметим, что для вычисления матриц  $C$ ,  $D$  не требуется моделировать систему на указанном интервале. Эти матрицы находятся по алгебраическим соотношениям при постоянном состоянии и входе системы. Рассмотрим следующий пример.

**Пример.** Пусть непрерывно-дискретная система описывается следующими дифференциально-разностными уравнениями:

$$x_1[k_1 + 1] = K_1 T_1 u_1(k_1 T_1) + x_1[k_1],$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2(t) &= u(t), \\
u_1[k_1] &= g(k_1 T_1) - y(k_1 T_1), \\
u(t) &= x_1(k_1 T_1) - u_2[k_2], \\
u_2[k_2] &= K_2 y(k_2 T_2), \\
y(t) &= x_2(t),
\end{aligned} \tag{6.52}$$

где  $k_j = E(t/T_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $g(t)$  – задающее (командное) воздействие – вход системы;  $T_1, T_2$  – интервалы дискретности;  $T_1 = 2T_2$ ;  $K_1, K_2$  – коэффициенты передачи;  $y(t)$  – выход системы;  $x = [x_1, x_2]^T$  – общий вектор состояния системы. Приведем уравнения (6.52) к виду (6.49), используя изложенную выше методику. Для этого сначала положим  $g(t) \equiv 0$ ,  $x(0) = [1, 0]^T$ . Найдя решение (6.52) при  $t = T_1$  (учитывая, что  $T_1 = 2T_2$ ), получим  $x(T_1) = [1, T_2(2 - K_2 T_2)]^T$ . Полагая теперь  $x(0) = [0, 1]^T$ , найдем, что  $x(T_1) = [-2K_1 T_2, (1 - K_2 T_2)^2]^T$ . Следовательно, матрица

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2K_1 T_2 \\ T_2(2 - K_2 T_2) & (1 - K_2 T_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления матрицы  $Q$  положим  $x(0) = 0$ ,  $g(t) \equiv 1$ . Снова решая (6.52), получим  $Q = [2K_1 T_2, 0]^T$ . Матрицы  $C, D$  определяются по уравнению выхода в (6.52) и имеют вид  $C = [0, 1]$ ,  $D = 0$ . Найденные таким образом уравнения вида (6.49) точно определяют поведение системы (6.52) при  $t = 0, T_1, 2T_1, \dots$ .

Для более сложных случаев задача решается численно моделированием системы. Число циклов моделирования равно  $n + m$ . Каждый цикл выполняется на промежутке  $[0, T]$ , где  $T$  – наибольший период дискретности системы. При указанных предположениях метод не имеет алгоритмической ошибки и его точность определяется погрешностью моделирования. Значение этой погрешности может быть уменьшено подходящим выбором метода моделирования (численного интегрирования) и снижением величины его шага. Описанный здесь метод можно использовать и для построения дискретных моделей рассмотренных выше одночастотных систем. При этом не требуется преобразовывать уравнения системы к единым уравнениям состояния (6.13), а достаточно располагать программой моделирования системы. Данный метод можно также использовать для приближенного исследования нестационарных и нелинейных систем.

## 6.10. Устойчивость дискретных моделей. Связь с методами численного интегрирования

При построении дискретных моделей непрерывных систем естественно возникает требование сохранения свойства устойчивости: устойчивая непрерывная система должна приводить к устойчивой дискретной модели, а в случае неустойчивости исходной системы и дискретная модель тоже должна получиться неустойчивой. Как показано ниже, для точных методов перехода это требование выполнено. Приближенные методы данному условию отвечают далеко не всегда. Ниже приведены результаты исследования условий устойчивости по отношению к рассмотренным приближенным формулам и дана интерпретация полученных результатов для задачи численного интегрирования дифференциальных уравнений.

### 6.10.1. Условия устойчивости

**Точный переход.** Как известно, асимптотическая устойчивость непрерывных систем имеет место, если корни характеристического многочлена (собственные числа) матрицы  $A$  в (6.13) имеют отрицательные вещественные части:  $\text{Res}_i < 0$  при  $\det(s_i \mathbf{I}_n - A) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  ([3, 15, 76, 79, 66]). В свою очередь, дискретная система (6.14) будет устойчива асимптотически, если выполнено условие:  $|z_i| < 1$  при  $\det(z_i \mathbf{I}_n - P) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для проверки устойчивости дискретной модели, полученной на основе некоторого метода, воспользуемся следующей известной из теории матриц теоремой. [53]

**Теорема.** Если функция  $f(s)$  определена на спектре  $\{s_i\}$   $n \times n$ -матрицы  $A$ , то собственные числа  $z_i$   $n \times n$ -матрицы  $P = f(A)$  выражаются формулами  $z_i = f(s_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

Согласно точной формуле (6.17),  $P = e^{AT_0}$ . Поэтому собственные числа  $z_i$  матрицы  $P$  определяются соотношением  $z_i = e^{s_i T_0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Следовательно, при всех  $T_0 > 0$  выполнено  $\{\text{Res}_i < 0 \iff |z_i| < 1\}$  и свойства устойчивости систем (6.13), (6.14) эквивалентны. Рассмотрим теперь описанные в п. 6.5.2. приближенные методы.

**2. Метод Эйлера.** Согласно этому методу, по (6.20) получаем  $P = \mathbf{I}_n + AT_0$ . Следовательно,  $z_i = 1 + s_i T_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Проверка условия устойчивости  $|z_i| < 1$  приводит к неравен-

ствам

$$(\alpha_i+1)^2+\beta_i^2 < 1, \quad \alpha_i = T_0 \cdot \operatorname{Re} s_i, \quad \beta_i = T_0 \cdot \operatorname{Im} s_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.53)$$

Условие (6.53) означает, что значения корней характеристического многочлена системы, умноженные на интервал квантования, должны находиться на комплексной плоскости внутри окружности единичного радиуса с центром в точке  $(-1, j0)$ . Оно эквивалентно неравенству

$$T_0 < 2 \min_i \frac{|\operatorname{Re} s_i|}{|s_i^2|}. \quad (6.54)$$

Например, дискретная модель апериодического звена с постоянной времени, полученная по формуле Эйлера, будет неустойчивой при  $T_0/2 > T$ . Дискретная модель консервативного звена ( $s_{1,2} = \pm j\beta$ ) неустойчива при всех  $T_0 > 0$ .<sup>13</sup> Это свойство существенно сужает область применения явного метода Эйлера, ограничивая ее малыми (относительно модулей собственных чисел системы) значениями  $T_0$ .

**3. Неявный метод Эйлера.** Согласно формуле (6.23),  $P = (\mathbf{I}_n - A\tau)^{-1}$ . Следовательно,  $z_i = \frac{1}{1 - s_i T_0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Нетрудно убедиться, что условие  $|z_i| < 1$  приводит теперь к неравенствам

$$(\alpha_i-1)^2+\beta_i^2 > 1, \quad \alpha_i = T_0 \cdot \operatorname{Re} s_i, \quad \beta_i = T_0 \cdot \operatorname{Im} s_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.55)$$

Условие (6.55) означает, что корни характеристического многочлена системы, умноженные на интервал квантования, должны находиться на комплексной плоскости вне окружности единичного радиуса с центром в точке  $(1, j0)$ . В свою очередь отсюда следует, что при такой аппроксимации для любой устойчивой непрерывной системы будет получена устойчивая дискретная модель при всех (а не только малых)  $T_0 > 0$ . Отметим, что свойства устойчивости непрерывных и дискретных моделей не будут эквивалентными: устойчивые дискретные модели могут получиться и при неустойчивости исходных непрерывных систем. Кроме того, точность аппроксимации по этому методу невелика (как отмечено выше, ошибка

<sup>13</sup> Справедливо также и то, что при  $T_0 \rightarrow 0$  значения  $z_i$ , полученные по всем указанным методам, стремятся к точным величинам  $z_i = e^{s_i T_0}$ .

имеет порядок малости  $O(T_0)$ ). Лучшие результаты получаются с помощью "диагональных" аппроксимаций Паде.

**4. Аппроксимации Паде при  $\nu = \mu$ .** Можно установить, что для аппроксимаций Паде  $(\mu, \nu)$  при  $\nu = \mu$  и всех  $T_0 > 0$  справедливо  $\{ \text{Res}_i < 0 \iff |z_i| < 1 \}$ . Следовательно, при их использовании устойчивость системы (6.13) эквивалентна устойчивости системы (6.14). В частности, это свойство выполнено для рассмотренных выше аппроксимаций (6.24) (метод Тастина) и (6.25). Учитывая, что их ошибки имеют порядки малости  $O(T_0^3)$  и  $O(T_0^5)$  соответственно, можно рассчитывать на получение дискретных моделей, свойства которых достаточно близки к свойствам исходных непрерывных систем.

В качестве иллюстрации на рис. 6.1 показаны границы областей устойчивости дискретных моделей непрерывных систем в плоскости  $sT_0$ . Следует учесть, что для неявных методов ( $\nu \neq 0$ ) область устойчивости располагается по внешнюю сторону от границы.

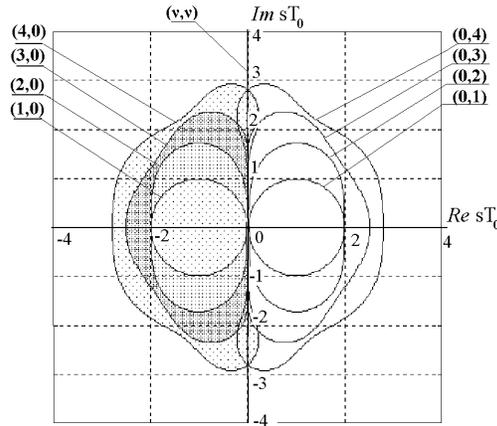


Рис. 6.1. Области устойчивости дискретных моделей для некоторых аппроксимаций Паде.

#### 6.10.2. Устойчивость методов численного интегрирования

Можно установить тесную связь между рассмотренными выше методами построения дискретных моделей непрерывных

систем, с одной стороны, и методами численного решения задачи Коши – с другой [3, 72]. Не вдаваясь в подробности, рассмотрим некоторые характерные особенности последней задачи. Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad \text{при} \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0. \quad (6.56)$$

Его численное решение может быть получено в виде некоторого рекуррентного соотношения  $x_{k+1} = \varphi(x_k, k)$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  – номер шага (итерации), а значения  $x_k$  соответствуют значениям искомой функции  $x(t)$  в дискретные моменты времени  $t_k = kh$ , где  $h > 0$  – шаг интегрирования.<sup>14</sup> Вид функции  $\varphi(x_k, k)$  определяется по исходной функции  $f(x, t)$  согласно выбранному методу численного интегрирования. Например, используя метод Эйлера, получаем известную формулу

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_k)h, \quad t_k = k \cdot h, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.57)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда  $f(x, t)$  линейна по  $x$  и уравнение (6.56) может быть представлено в виде

$$\dot{x}(t) = Ax + \phi(t), \quad (6.58)$$

где  $A$  –  $n \times n$ -матрица. Формула метода Эйлера (6.57) приводит к разностному уравнению

$$x_{k+1} = (\mathbf{I}_n + Ah)x_k + \phi(t_k)h. \quad (6.59)$$

Заметим, что (6.59) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (6.14), в котором матрицы  $P, Q$  получены на основе приближенной формулы (6.20) для матричной экспоненты. Устойчивость полученной численной процедуры определяется приведенными выше в п. 6.10.1. свойствами данной аппроксимации: для  $A$  и  $T_0 = h$  должно выполняться неравенство (6.53).<sup>15</sup> Следовательно, если собственные числа системы велики по модулю (что соответствует малым постоянным

<sup>14</sup> Здесь мы несколько отошли от принятых выше обозначений для дискретных процессов.

<sup>15</sup> Приведенные здесь для линейных систем результаты можно распространить и на задачу интегрирования нелинейного уравнения (6.56), если в качестве матрицы  $A$  брать матрицу Якоби  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ .

времени), чтобы получить устойчивое решение, следует выбирать шаг интегрирования  $h$  достаточно малым. Это приводит к значительным затратам машинного времени. Кроме того, следует учесть, что уменьшение величины  $h$  вызывает увеличение инструментальных ошибок, связанных с конечностью разрядной сетки ЭВМ. Подобным свойством обладают все так называемые *явные* методы численного интегрирования, которые для линейных стационарных систем сводятся к аппроксимациям Тейлора (6.19). Наиболее отчетливо недостатки явных методов проявляются при решении *жестких* систем, у которых собственные числа отличаются по модулю в сотни и более раз. Для таких систем характерны быстропотекающие процессы в "пограничном слое", которые развиваются на фоне медленных движений [3, 72]. Обычно последние и представляют интерес для исследователя, однако при явных методах интегрирования приходится выбирать шаг  $h$  таким образом, чтобы не произошла потеря устойчивости из-за быстрых движений.<sup>16</sup> Рассмотрим теперь так называемые  *неявные*  методы. Предположим, что в (6.56) известно значение  $x(t_{k+1})$  и требуется найти  $x(t_k)$ . Очевидно, что в "обратном" времени уравнение (6.56) примет вид

$$\dot{x}(\tau) = -f(x, t_{k+1} - \tau), \quad x(0) = x(t_{k+1}), \quad \tau \geq 0.$$

Интегрирование его по формуле (6.57) дает

$$x_k = x_{k+1} + f(x_{k+1}, t_{k+1})h. \quad (6.60)$$

Разрешая это нелинейное уравнение относительно  $x_{k+1}$ , получаем искомое рекуррентное соотношение  $x_{k+1} = \varphi(x_k, k)$ . Если исходное уравнение имеет вид (6.58), приходим к разностному уравнению

$$x_{k+1} = (\mathbf{I}_n - Ah)^{-1} (x_k + \phi(t_{k+1})h), \quad (6.61)$$

которое соответствует вычислению матричной экспоненты по формуле Паде  $(0, 1)$ . Уравнение (6.61) устойчиво для любой устойчивой системы (6.58) при всех  $h > 0$ .<sup>17</sup> Подобным

<sup>16</sup> Использование методов интегрирования с переменным шагом позволяет автоматизировать эту процедуру, но не дает возможности избавиться от неэффективности вычислительного процесса.

<sup>17</sup> Область устойчивости для неявного метода Эйлера определяется приведенным в пункте 6.10.1. неравенством (6.55).

образом можно получить неявные методы интегрирования более высокого порядка, соответствующие другим аппроксимациям Паде. Надо отметить, что использование неявных методов предполагает решение на каждом шаге интегрирования систем нелинейных алгебраических уравнений вида (6.60). В общем случае это приводит к значительным вычислительным затратам, поэтому применение неявных методов обычно эффективно именно для жестких систем. Если рассматривается задача моделирования линейных стационарных систем вида (6.58), то в решении систем уравнений (6.60) на каждой итерации нет необходимости. Действительно, тогда достаточно вычислить матрицы  $P$ ,  $Q$  соответствующей (6.58) дискретной модели (6.14) перед началом интегрирования, а затем использовать рекуррентную формулу (6.14) для получения последовательности  $x_k$ . В этом случае применение аппроксимаций Паде позволяет многократно уменьшить время вычислений по сравнению со стандартными процедурами интегрирования. Более подробные сведения о численном решении дифференциальных уравнений и условиях устойчивости численных методов содержатся, например, в работах [13, 72], а также в п. 11.4.5. (с. 277), посвященном методу функций Ляпунова.

### 6.11. Обратная задача – континуализация дискретных моделей

При исследовании системы по аналоговому прототипу возникает обратная задача перехода от описания дискретной системы к ее непрерывной (“аналоговой”) модели, другими словами – задача преобразования уравнений (6.14) к эквивалентным (в указанном выше смысле) уравнениям (6.13). Как ясно из вышеизложенного, в уравнениях состояния этот переход может быть выполнен вычислением *матричного логарифма*. Рассмотрим этот метод подробнее, полагая, что эквивалентная непрерывная система работает при кусочно-постоянном входном воздействии вида (6.15).<sup>18</sup> Для системы первого порядка при  $P = 1$  матрицы  $A$ ,  $B$  непрерывной модели принимают вид  $A = 0$ ,  $B = Q/T_0$ .

<sup>18</sup> Изложенный здесь метод реализован в тулбоксе CONTROL SYSTEMS пакета MATLAB [139].

Для других систем строится расширенная матрица

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & Q \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

размера  $(n+m) \times (n+m)$  и вычисляется *матричный логарифм*  $\bar{A} = (\log \bar{P})/T_0$ . Искомые  $n \times n$ -матрица  $A$  и  $n \times m$ -матрица  $B$  непрерывной модели (6.13) определяются, как соответствующие блоки матрицы  $\bar{A}$ , структура которой представляется в виде

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Звездочками обозначены подматрицы, значения которых не используются.

### 6.12. Задачи и упражнения

1. Вывести формулы для вычисления матричной экспоненты  $\mathbf{e}^{\mathbf{J}t}$  для жордановой клетки  $\mathbf{J}$  произвольного заданного порядка (см. с. 139).
2. Получить  $\mathbf{e}^{At}$  в аналитическом виде для заданных в упражнении 1 на с. 126 матриц. (Указание – использовать метод, описанный в п. 6.5.1.).
3. Выполнить упражнение п.2 с использованием преобразования Лапласа (см. с. 142).
4. Воспользоваться аналитическими выражениями для матричной экспоненты (п. 6.5.1.) и формулами перехода к дискретным моделям (п.п. 6.4.2. 6.6.) для получения таблицы соответствия передаточных функций типовых непрерывных динамических звеньев [15, 76] и их дискретных моделей при использовании экстраполятора нулевого порядка. Сравнить с приведенными в [15, 76] результатами, основанными на  $z$ -преобразовании.
5. Доказать перечисленные в п. 6.4.2. свойства переходной матрицы.
6. Вывести формулу для определения начального состояния  $x_0$ , если при  $t < 0$  входное воздействие  $u(t) \neq 0$  (функция  $u(t)$  задана при всех  $t$ ). Использовать изложенный в п. 6.3. с. 133, метод.
7. С точки зрения рассмотренной в п. 6.3. задачи дать интерпретацию ситуации, когда матрица  $Q$  – вырожденная.

## 7. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 7.1. Основные определения

Понятия управляемости и наблюдаемости являются одними из основных понятий теории управления. На содержательном уровне управляемость означает принципиальную возможность приведения системы в любое заданное состояние, а наблюдаемость – возможность определения состояния системы по результатам измерений. Эти свойства весьма существенны для построения работоспособных систем автоматического управления. Приведем некоторые определения [3, 30, 44, 47, 83].

**Определение 1.** Состояние  $x^*$  *достижимо* из состояния  $x_0$ , если существует допустимое (кусочно-непрерывное) управление  $u_{[t_0, t_1]}$ , определенное на конечном промежутке  $[t_0, t_1]$ ,  $0 < t_1 - t_0 < \infty$  такое, что система под действием управления  $u_{[t_0, t_1]}$  переводится из начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в конечное  $x(t_1) = x^*$ .

**Определение 2.** Система называется *сильносвязной* (*вполне достижимой*), если у нее каждое состояние достижимо из любого другого. Другими словами, у подобных систем нет таких областей в пространстве состояний, в которые за конечное время нельзя попасть из любых других областей под действием допустимого управления.

Для линейных систем понятие сильносвязности переходит в понятие полной управляемости.

В качестве примера системы, для которой это свойство отсутствует, можно рассмотреть объект, состоящий из звена с насыщением, последовательно соединенного с апериодическим звеном:  $u_1(t) = \text{sat}(u(t))$ ,  $T\dot{x}(t) + x(t) = u_1(t)$  ( $u$  – управление,  $\text{sat}(\cdot)$  – функция насыщения; рис. 7.1). Очевидно, что не существует функции  $u(t)$  такой, что из начальных состояний  $\{x_0 : |x_0| < 1\}$  система переводится в область  $\{x_0 : |x_0| > 1\}$ . □

Как указано в п. 1.1. состояние детерминированной системы характеризуется тем, что при заданном начальном состоянии  $x(t_0) = x_0$  выход системы  $y(t_1)$  однозначно определяется ее входом  $u(t)$  на промежутке  $[t_0, t_1]$ . Однако по отношению к  $x_0$ , эта связь может быть не взаимно-однозначной: может

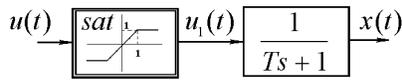


Рис. 7.1. Система с недостижимыми состояниями.

оказаться, что имеется множество различных состояний такое, что при любом начальном состоянии из этого множества и для любого входного воздействия получаются одинаковые реакции.

**Определение 3.** Состояния  $x'_0$  и  $x''_0$  называются *эквивалентными*,  $x'_0 \sim x''_0$ , если при любом входном процессе  $u(t)$  выходы системы при начальном состоянии  $x(t_0) = x'_0$  и  $x(t_0) = x''_0$  совпадают (рис. 7.2).

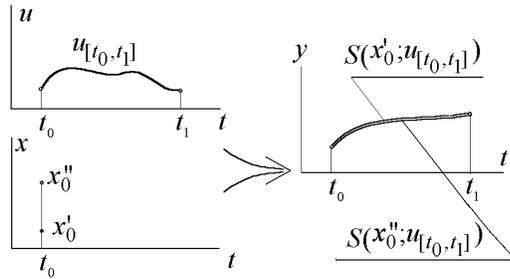


Рис. 7.2. Эквивалентные состояния,  $x'_0 \sim x''_0$ .

**Определение 4.** Система называется *редуцированной*, если у нее нет различных эквивалентных состояний, т.е. каждое состояние эквивалентно только самому себе. Иными словами, для редуцированных систем при любом входе и любом начальном состоянии отображение вход–состояние–выход не только однозначно, но и взаимно – однозначно.

**Определение 5 (управляемости).** Линейная система (ЛС) *полностью управляема (управляема)*, тогда и только тогда, когда для любых  $x_*$  и  $t_0$  существуют  $0 < T < \infty$  и кусочно-непрерывное управление  $u_{[t_0, t_1]}$ ,  $t_1 = t_0 + T$ , такое, что при  $x(t_0) = 0$  и управлении  $u_{[t_0, t_1]}$  имеет место  $x(t_1) = x_*$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Для линейных систем это означает, что каждое состояние достижимо из любого другого, т.е. управляемость для них эквивалентна связности.

**З а м е ч а н и е 2.** Если управляемая линейная система стационарна, то попадание в  $x^*$  можно обеспечить за любое заданное  $T > 0$ .

В некоторых приложениях также представляет интерес *управляемость по выходам*, которая означает возможность приведения выхода объекта в заданную точку. В работе [93] приводится группа различных понятий управляемости, куда кроме указанного понятия относится также возможность приведения объекта из любой точки некоторой замкнутой области в произвольную точку этой области без выхода за ее границы, перехода из заданной области в область меньшей размерности и т. д.

**Определение 6 (наблюдаемости).** ЛС *полностью наблюдаема (наблюдаема)* тогда и только тогда, когда существует  $0 < T < \infty$  такое, что при всех  $t_0$ ,  $x(t_0)$ ,  $u_{[t_0, t_1]}$ , ( $t_1 = t_0 + T$ ) можно по  $y_{[t_0, t_1]}$  и  $u_{[t_0, t_1]}$  однозначно определить  $x(t_0)$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Для стационарной наблюдаемой ЛС значение  $x(t_0)$  можно определить за любое заданное  $T > 0$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Так как наблюдаемость, если она есть, должна быть и при нулевом входе, можно считать, что система наблюдаема, если для нее по  $y_{[t_0, t_1]}$  можно однозначно определить  $x(t_0)$  при  $u(t) \equiv 0$ . Можно показать: это условие эквивалентно тому, что из  $y(t) = 0$  при  $u(t) = 0$  для всех  $t \in [t_0, t_1]$  следует:  $x(t_0) = 0$ .

Естественно, что для стационарных ЛС проверку условий управляемости и наблюдаемости можно выполнять не для всех  $t_0$ , а только для одного (например,  $t_0 = 0$ ).<sup>1</sup>

Наиболее сильной формой управляемости является *нормализуемость (нормальность)*. Говорят, что система нормальна, если управляемость имеется по каждой компоненте вектора управления. Для систем со скалярным входным процессом управляемость и нормализуемость совпадают.

Возможен случай *частично управляемой* системы, у которой не все состояния достижимы из нулевого за конечное время. Пространство состояний таких систем может быть представлено как прямая сумма подпространств управляемых и

---

<sup>1</sup> Для нестационарных систем рассматриваются также *достижимость* и *восстанавливаемость* [47], которые в стационарном случае совпадают соответственно с управляемостью и наблюдаемостью. Поскольку далее рассматриваются, в основном стационарные системы указанные понятия здесь не уточняются.

неуправляемых состояний. Аналогично пространство состояний *частично наблюдаемой* системы можно разбить на подпространства наблюдаемых и ненаблюдаемых состояний.

**Определение 7.** ЛС называется *стабилизируемой*, если у нее подпространство управляемых состояний принадлежит подпространству *устойчивых* состояний.

Стабилизируемость означает принципиальную возможность получения устойчивой замкнутой системы: собственные движения неуправляемой части системы в этом случае устойчивы, а на неустойчивую подсистему можно воздействовать соответствующим управлением. Очевидно, что полностью управляемая система стабилизируема (так как у нее нет неуправляемых состояний). Устойчивая система тоже стабилизируема, так как у нее все пространство состояний является подпространством устойчивых состояний.

**Определение 8.** ЛС называется *обнаруживаемой*, если у нее подпространство неуправляемых состояний принадлежит подпространству устойчивых состояний.

Полностью наблюдаемые, а также устойчивые системы обнаруживаемы.

**Определение 9.** Полностью наблюдаемая и полностью управляемая линейная система называется *невыврожденной*.

## 7.2. Критерии управляемости

Исследование управляемости линейных стационарных систем можно проводить на основе ряда эквивалентных критериев. Ниже даны некоторые критерии управляемости стационарных систем [3, 30, 83].

1. (Критерий Калмана). *Матрица управляемости*

$$Q_y \triangleq [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad \text{размера } (n \times nm) \quad (7.1)$$

имеет полный ранг,<sup>2</sup>  $\text{rank} Q_y = n$ , где  $n$  – размерность пространства состояний системы. Как известно [47], подпространство управляемых состояний порождается столбцами матрицы  $Q_y$ . Поэтому, если эта матрица имеет  $n$  линейно

---

<sup>2</sup> Напомним, что *рангом матрицы* называется наибольшее число линейно-независимых строк (или столбцов) этой матрицы. Его значение совпадает также с порядком наибольшего отличного от нуля минора данной матрицы [3, 53, 66, 115].

независимых столбцов, все пространство состояний является подпространством управляемых состояний. Для СИМО-систем (со скалярным управлением,  $u(t) \in \mathcal{R}$ ) матрица  $Q_y$  квадратная порядка  $n$  и данный критерий означает требование невырожденности матрицы  $Q_y$ :  $\det Q_y \neq 0$ .

2. Не существует ни одной невырожденной матрицы  $T$ ,  $\det T \neq 0$ , такой, что система, полученная преобразованием подобия  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ , имеет матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  вида

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0}_{n_2 \times m} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Такая структура матриц  $\tilde{A}$ , и  $\tilde{B}$  означает, что в соответствующем базисе вектор состояния  $\tilde{x} \in \mathcal{R}^n$  можно представить в виде  $\tilde{x} = \text{col}\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ ,  $\tilde{x}_1 \in \mathcal{R}^{n_1}$ ,  $\tilde{x}_2 \in \mathcal{R}^{n_2}$ ,  $n = n_1 + n_2$ , причем на компоненты вектора  $\tilde{x}_2$  входное воздействие ни прямо, ни косвенно (через  $\tilde{x}_1$ ) влиять не может. Следовательно, такая система неуправляема по вектору  $\tilde{x}_2$ . Множество векторов  $\text{col}\{0, \tilde{x}_2\}$  образует подпространство неуправляемых состояний системы. Если это подпространство принадлежит подпространству устойчивых состояний (т.е. матрица  $A_{22}$  – гурвицева),<sup>3</sup> то система стабилизируема (неуправляемые движения затухают)

В литературе уравнения с матрицами  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  указанного вида иногда называются *канонической формой управляемости* [47, 174]. Структурная схема системы указанного вида приведена на рис. 7.3, а).

3. Матрица  $B$  не принадлежит инвариантному подпространству матрицы  $A$  размерности, меньшей, чем  $n$ .<sup>4</sup> Если вектор-столбец  $B$  принадлежит инвариантному подпространству  $\mathcal{X}^A$ ,  $\dim \mathcal{X}^A < n$ , то вектор фазовой скорости  $v$  системы  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  будет принадлежать  $\mathcal{X}^A$  при любом входном процессе, если начальное состояние  $x_0 \in \mathcal{X}^A$ . Следовательно, точки вне этого подпространства недостижимы и

<sup>3</sup> Напомним, что *гурвицевой* называется матрица, все собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части.

<sup>4</sup> В таком виде критерий формулируется для систем со скалярным управлением. При  $m > 1$  по этому критерию не должно существовать инвариантного подпространства матрицы  $A$  размерности, меньшей, чем  $n$ , которое содержало бы одновременно все столбцы матрицы  $B$ .

Определение инвариантного подпространства матрицы дано выше в п. 3.1.2. сноска на с. 83

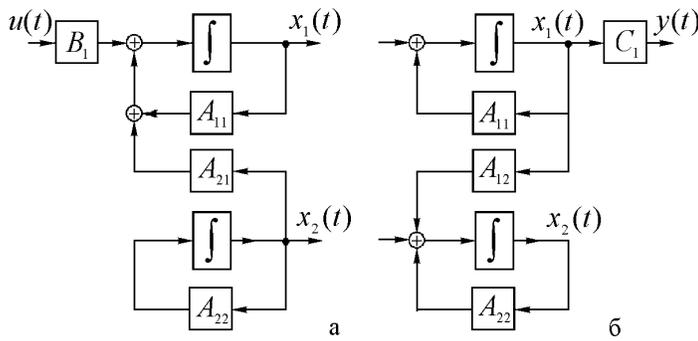


Рис. 7.3. Канонические формы управляемости (а) и наблюдаемости (б).

система не полностью управляема.

4. Для любого многочлена  $D(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n$ , где  $d_i \in \mathcal{R}$  – заданные постоянные числа, найдется такая  $m \times n$ -матрица  $K$ , что  $\det(s\mathbf{I}_n - A + BK) = D(s)$ .

Это свойство означает, что для полностью управляемой системы всегда имеет решение задача *модального управления по состоянию* – обеспечения заданных значений коэффициентов характеристического многочлена замкнутой системы с помощью регулятора в цепи обратной связи вида  $u(t) = -Kx(t)$ .<sup>5</sup>

5. Не существует ни одной отличной от нуля матрицы  $C$  такой, чтобы передаточная функция  $W(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$  тождественно (для всех  $s$ ) равнялась нулю.

6. Равенство  $Ce^{At}B = 0$  при всех  $t$ ,  $t_1 < t < t_2$  для некоторого  $C \in \mathcal{R}^n$  возможно только при  $C = 0$ .

Функция веса (см. п. 6.2. с. 133) полностью управляемых систем с одним выходом обращается в ноль на конечном интервале только в тривиальном случае  $C = 0$ .

7. Выполнение соотношений  $A^T z = \lambda_0 z$  и  $B^T z = 0$  для некоторого  $\lambda_0 \in \mathcal{C}$  и  $z \in \mathcal{R}^n$  возможно лишь при  $z = 0$  [30, 83].

Отсюда, в частности, вытекает следующий критерий:

8. Если пара  $(A, B)$  управляема, то для любой  $m \times n$ -матрицы  $K$  пара  $(A + BK, B)$  также управляема.

<sup>5</sup> Более подробно решение этой задачи для скалярного управления рассматривается ниже в главе 9.

Таким образом, замыкание управляемой системы обратной связью по состоянию  $u(t) = Kx(t)$  при любой матрице  $K$  приводит также к управляемой системе.

9. Если пара  $(A, B)$  управляема и  $s_i$  – произвольное собственное число матрицы  $A$ , то дефект  $d$  матрицы  $s_i \mathbf{I}_n - A$  не превосходит ранга матрицы  $B$  [30].<sup>6</sup>

В частности, если  $m = 1$  (или если при  $m > 1$   $\text{rank} B = 1$ ), то должно выполняться  $d = 1$ , т.е. из управляемости пары  $(A, B)$  следует, что каждому собственному значению  $s_i$  отвечает лишь одна клетка канонической жордановой формы матрицы  $A$ .

10. Для любых  $t_1 > t_0$  матрица

$$\mathcal{W}(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{A\tau} B B^T \mathbf{e}^{A^T \tau} d\tau, \quad (7.3)$$

называемая *грамианом управляемости*, положительно определена.

Для доказательства предположим, что указанное условие выполнено [30],  $\mathcal{W}(t_0, t_1) = \mathcal{W}(t_0, t_1)^T > 0$  для всех  $t_1 > t_0$ . Управление,  $u_{[t_0, t_1]}$ , переводящее систему из состояния  $x(t_0) = x_0$  в состояние  $x(t_1) = x_1$  будем искать в виде  $u(t) = B^T \mathbf{e}^{A^T(t-t)} C$ , где  $C$  – некоторый постоянный  $n$ -мерный вектор. Согласно формуле Коши (6.9, с. 130) и в силу стационарности системы  $x_1 - \mathbf{e}^{A(t_1-t_0)} x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{A(t_1-\tau)} B B^T \mathbf{e}^{A^T(t_0-\tau)} d\tau$ , или  $x_1 - \mathbf{e}^{A\theta} x_0 = \mathcal{W}(\theta)$ , где

$$\theta \triangleq t_1 - t_0 > 0, \quad \mathcal{W}(\theta) \triangleq \mathcal{W}(0, \theta) = \int_0^\theta \mathbf{e}^{A\tau} B B^T \mathbf{e}^{A^T \tau} d\tau.$$

По условию  $\mathcal{W}(\theta) > 0$ , следовательно,  $\det \mathcal{W}(\theta) \neq 0$  и поэтому  $C = \mathcal{W}(\theta)^{-1} (x_1 - \mathbf{e}^{A\theta} x_0)$ . Окончательно, получаем выражение для управления

$$u(t) = B^T \mathbf{e}^{A^T(t-t)} \mathcal{W}(\theta)^{-1} (x_1 - \mathbf{e}^{A\theta} x_0). \quad (7.4)$$

Найденное таким образом управление решает задачу перевода полностью управляемой системы из любого начального

<sup>6</sup> *Дефектом матрицы* называется разность между ее порядком и рангом. Дефект матрицы  $s_i \mathbf{I}_n - A$  равен числу жордановых клеток в канонической форме матрицы  $A$ , отвечающих собственному значению  $s_i$ .

состояния  $x(t_0) = x_0$  в любое заданное  $x(t_1) = x_1$  за указанный положительный промежуток времени  $\theta = t_1 - t_0$  для всех  $t_1 > t_0$ ; следовательно, пара  $(A, B)$  управляема.

Заметим, что здесь приведено только доказательство достаточности положительной определенности  $\mathcal{W}(t_0, t_1)$  для полной управляемости системы. Необходимость этого условия, наряду с другими критериями доказывается [3, 30, 83].

Последний критерий можно использовать и для исследования управляемости нестационарных систем в следующей формулировке.

Линейная система (с переменными параметрами)  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  полностью управляема тогда, и только тогда, когда для всех  $t_0$  существует  $t_1$ , ( $t_0 < t_1 < \infty$ ), что матрица

$$\mathcal{W}(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau$$

невырожденная (здесь  $\Phi(t, \tau)$  – переходная матрица системы, см. п. 6.3).

Для SIMO-систем ( $u(t) \in \mathcal{R}$ ,  $m = 1$ ) имеются также следующие критерии полной управляемости.

11. Для любой другой управляемой пары  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  такой, что  $\det(s\mathbf{I}_n - A) \equiv \det(s\mathbf{I}_n - \tilde{A})$  существует единственная матрица преобразования  $T$ ,  $\det T \neq 0$  такая, что  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ .

Матрица  $T$  определяется формулой  $T = \tilde{Q}_y Q_y^{-1}$ , где  $\tilde{Q}_y$ ,  $Q_y^{-1}$  – матрицы управляемости систем  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  и  $(A, B)$  соответственно. В частности, любую полностью управляемую стационарную SIMO-систему ( $m = 1$ ) можно преобразовать к каноническому управляемому представлению (см. п. 3.2.2.), в котором матрица  $\tilde{A}$  – сопровождающая для своего характеристического многочлена (матрица Фробениуса)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$\det(s\mathbf{I}_n - \tilde{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n,$$

а  $n \times 1$ -матрица  $\tilde{B} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ .<sup>7</sup>

12. Всегда найдется такая  $(1 \times n)$ -матрица  $C$ , что передаточная функция

$$W(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B \triangleq \frac{B(s)}{\det(s\mathbf{I} - A)} \quad (7.5)$$

– несократимая дробь (т.е. не имеет общих нулей и полюсов и степень знаменателя  $W(s)$  равна  $n$ ).

13. Для любого заданного многочлена  $B(s)$  степени  $n - 1$  всегда найдется такая  $(1 \times n)$ -матрица  $C$ , что передаточная функция имеет вид (7.5).

Свойство 12 дает удобное достаточное условие полной управляемости систем со скалярным входом: если  $W(s)$  несократима, то система полностью управляема. Обратное может оказаться неверным.

### 7.3. Критерии наблюдаемости. Теорема дуальности

Для исследования наблюдаемости систем также имеется несколько эквивалентных критериев. В частности, по аналогии со свойством п.6 управляемости равенство  $Ce^{At}x_0 = 0$  при всех  $t$ ,  $t_1, t_2, t_1 < t < t_2$  возможно только при  $x_0 = 0$ . Следовательно, наблюдая за выходом  $y(t) = Cx(t)$  такой системы при нулевом входе, всегда можно определить, находится ли система в состоянии равновесия.

Другим критерием полной наблюдаемости является равенство  $\text{rank} Q_n = n$ , где  $n$  – размерность пространства состояний системы,  $Q_n$  – матрица наблюдаемости,  $Q_n \triangleq [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$  размера  $n \times nl$ . В частности, для MISO-систем ( $l = 1$ ) матрица наблюдаемости должна быть невырожденной.

Анализируя указанные выше свойства, убеждаемся в справедливости *теоремы дуальности* Калмана, согласно которой из полной управляемости пары  $(A, B)$  следует полная наблюдаемость пары  $(A^T, B^T)$ , и, наоборот, из полной наблюдаемости пары  $(A, C)$  следует полная управляемость пары

---

<sup>7</sup> Полная управляемость пары  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  указанного вида всегда выполняется. В этом можно убедиться непосредственным использованием критерия п.1.

$(A^T, C^T)$ . Поэтому нет необходимости рассматривать все критерии полной наблюдаемости, достаточно в формулировках критериев управляемости произвести замену  $A$  на  $A^T$  и  $B$  на  $C^T$ .

Отсюда, в частности, получаем, что полностью наблюдаемую систему нельзя привести невырожденным преобразованием к виду

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 : \mathbf{0}_{l \times n_2} \end{bmatrix}, \quad n = n_1 + n_2.$$

Данная пара матриц обладает тем свойством, что у соответствующей системы имеются компоненты вектора состояния, которые ни прямо, ни косвенно (через другие компоненты) не участвуют в формировании выходного процесса.

По аналогии со свойством управляемости уравнения с матрицами  $\tilde{A}$  и  $\tilde{C}$  указанного вида называются *канонической формой наблюдаемости* [47, 174]. Соответствующая структурная схема приведена на рис. 7.3, б).

Далее, для полностью наблюдаемой MISO-системы ( $y(t) \in \mathcal{R}$ ) всегда найдется  $n \times 1$ -матрица  $B$  такая, что передаточная функция  $W(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$  – несократимая дробь со степенью знаменателя, равной  $n$ . Таким образом, нетрудно показать, что несократимость передаточной функции при  $m = l = 1$  является необходимым и достаточным условием невырожденности SISO-систем.

В общем случае MIMO-систем невырожденность системы соответствует выполнению следующего условия для передаточных матриц [30].

Для любого собственного числа матрицы  $A$  существует такой минор  $M(s)$  матрицы  $\mathbf{W}(s)$ , что

$$\lim_{s \rightarrow s_i} A(s)M(s) \neq 0, \quad (7.6)$$

где  $A(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A)$  – характеристический многочлен матрицы  $A$ . Для SIMO и MISO-систем это свойство означает невозможность представления  $\mathbf{W}(s)$  в виде отношения двух многочленов (матричного и скалярного) со степенью знаменателя меньшей, чем  $n$ . Невырожденность передаточной функции для SISO-систем вытекает отсюда как частный случай.

Проверку условия невырожденности MIMO-систем можно упростить, если воспользоваться следующим результатом [30].

Для полной управляемости системы  $(A, B)$  необходимо и достаточно, чтобы для любого корня  $s_i$  многочлена  $A(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A)$  у матрицы  $\mathbf{W}(s)$  нашелся бы такой минор  $M(s)$  порядка, равного дефекту  $d$  матрицы  $(s_i\mathbf{I}_n - A)$ , что выполнено (7.6).

**З а м е ч а н и е .** Пусть  $r_B \triangleq \text{rank}(B)$ ,  $r_C \triangleq \text{rank}(C)$ . Выше отмечено, что если хотя бы для одного корня  $s_i$  выполнено  $d > r_B$ , то система  $(A, B)$  неуправляема, а если  $d > r_C$ , то система  $(A, C)$  ненаблюдаема. Поэтому передаточная матрица  $\mathbf{W}(s)$  может быть невырожденной лишь при  $d \leq r_B$  и  $d \leq r_C$ . Значит, условие (7.6) имеет смысл проверять лишь при выполнении указанных неравенств и для миноров  $M(s)$  порядка  $d$ . Если дефект  $d$  неизвестен, то (7.6) следует проверять лишь для миноров, порядок которых не превосходит  $\max\{r_B, r_C, p_i\}$ , где  $p_i$  – кратность корня  $s_i$  [30].

Подпространство ненаблюдаемых состояний системы представляет собой нуль-пространство матрицы  $Q_n^T$ , т.е. является множеством таких  $x$ , что  $Q_n^T x = 0$ . Если система полностью наблюдаема, то это подпространство вырождается в точку  $x = 0$ .

Для проверки нормальности системы следует воспользоваться критерием управляемости для матриц  $A, b_i$ , где  $b_i, i = 1, \dots, m$  – столбцы матрицы  $B$ .

Для проверки *управляемости по выходам* можно исследовать ранг матрицы  $L = [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B]$  [88].

Рассмотрим пример преобразования частично наблюдаемой системы к канонической форме наблюдаемости. Для этого вернемся к описанной в п. 1.4.3. на с. 31 линеаризованной модели обращенного маятника.

Как отмечено на с. 94 в п. 3.2.4. матрица наблюдаемости  $Q_n$  системы (1.18) вырожденная, следовательно, данная система не является полностью наблюдаемой. Приведем уравнения состояния маятника к канонической форме наблюдаемости. Воспользуемся описанной на с. 433 Приложения 3 процедурой **obsvf** пакета MATLAB [139].

Как указано в описании процедуры,

$$[\mathbf{Abar}, \mathbf{Bbar}, \mathbf{Cbar}, \mathbf{T}, \mathbf{K}] = \text{obsvf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

возвращает матрицы разбиения пространства состояний на подпространства наблюдаемых и ненаблюдаемых состояний. Если матрица наблюдаемости пары  $(A, C)$  имеет ранг

$r \leq n$ , то находится преобразование подобия с матрицей  $T$  такое, что  $Abar = TAT^{-1}$ ,  $Bbar = TB$ ,  $Cbar = CT^{-1}$  и преобразованная система имеет вид <sup>8</sup>

$$Abar = \begin{bmatrix} Ano & A_{12} \\ 0 & Ao \end{bmatrix}, \quad Bbar = \begin{bmatrix} Bno \\ Bo \end{bmatrix}, \quad Cbar = [0 \quad Co],$$

где пара  $(Ao, Co)$  – наблюдаемая и  $Co(sI - Ao)^{-1}Bo \equiv C(sI - A)^{-1}B$ .

В справедливости этого утверждения для данного примера можно убедиться с помощью следующей программы

**A=[0, 1, 0, 0; 0,-k/M,0,0; 0,0,0,1; -g/L\_1,0,g/L\_1,0]**

**B=[0; 1/M; 0; 0]; C=[-1 0 1 0]/L\_1;**

– формирование матриц уравнений состояния модели (1.18);

**[n,d]=ss2tf(A,B,C,D,0)**

– вычисление передаточной функции исходной системы;

**[Abar,Bbar,Cbar,T,K] = obsvf(A,B,C)**

– преобразование к канонической форме наблюдаемости;

**Co=Cbar(1,2:4), Bo=Bbar(2:4,1), Ao=Abar(2:4,2:4)**

– выделение наблюдаемой подсистемы;

**[no,do]=ss2tf(Ao,Bo,Co,0,1)**

**Qo=obsv(Ao,Co) do=det(Qo)**

– вычисление матрицы наблюдаемости подсистемы  $(Ao, Co)$  и определителя этой матрицы.

В результате работы программы получены матрицы

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 11.6 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 11.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.71 \\ -0.71 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [0, 0, 0, 1.68], \quad K = [1, 1, 1, 0].$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.71 & 0 & 0.71 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0 & 0.71 \\ 0 & -0.71 & 0 & 0.71 \\ -0.71 & 0 & 0.71 & 0 \end{bmatrix}.$$

<sup>8</sup> Среди возможных матриц  $T$  процедура **obsvf** находит ортогональную матрицу [53, 115], так что  $T^{-1} = T^T$ . Заметим, что процедура **obsvf** формирует матрицы, имеющие иной порядок размещения блоков, чем приведен на с. 175 для  $\tilde{A}, \tilde{C}$ .

Получаем одинаковые (с точностью до сокращения на множитель  $s$ ) передаточные функции, совпадающие с передаточной функцией исходной системы (3.15), приведенной в численном примере на с. 93. Матрица наблюдаемости

$$Q_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.68 \\ 0 & 1.68 & 0 \\ 0.84 & -0.84 & 91.6 \end{bmatrix}, \quad \det Q_o = -2.34.$$

#### 7.4. Задачи и упражнения

1. Доказать, что преобразование базиса не изменяет наблюдаемости и управляемости системы.
2. Доказать, что собственные числа матриц  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  при переходе к (7.2) (с. 170) инвариантны относительно выбора матрицы преобразования  $T$  [47].
3. Доказать, что подпространство управляемых состояний системы (7.2), как и исходной системы, порождается собственными векторами (с. 81), соответствующими *полюсам управляемости*, т.е. собственным числам матрицы  $A_{11}$  в (7.2) [47].
4. Сформулировать критерий управляемости для матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B + CU(t)D,$$

где  $X(t)$  –  $n \times n$ - матрица решений;  $U(t)$  –  $r \times m$ -матрица входов (управлений);  $A, B, C$  –  $n \times n$ ,  $D$  –  $m \times n$ -матрицы параметров [3].

5. Исследовать управляемость пары  $(A, B)$  при [3]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Вычислить грамиан управляемости (7.3)  $\mathcal{W}(0, 1)$  для системы  $\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$ .

7. Задача об обеспечении конечной длительности переходного процесса, [174]. Рассмотрим дискретную, полностью управляемую систему

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \quad x[k] \in \mathcal{R}^n, \quad u[k] \in \mathcal{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

Известно, что эта система может быть приведена в состояние равновесия не более, чем за  $n$  шагов. Найдём уравнения линейного регулятора в обратной связи.

а) Пусть  $Q$  – матрица управляемости системы (7.7). Обозначим через  $r_i^T$   $i$ -ю строку матрицы  $Q^{-1}$ , так что

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{bmatrix}.$$

Показать, что управление  $u[k] = -r_{n-k}^T A^n x[0]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  приведет систему (7.7) в состояние равновесия за кратчайшее время.

б) Обозначим  $K \triangleq r_n^T A^n$ . Показать, что обратная связь  $u = -Kx$  приводит к такому же результату, что и управление п. 7.а.

в) Замкнутая система описывается уравнением

$$x[k+1] = (A - BK)x[k].$$

Пусть все собственные числа матрицы  $A - BK$  равны нулю. Какова жорданова форма этой матрицы?

8. Рассмотреть систему (7.7) с матрицами [174]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

а) Для  $B_1$  и  $B_2$  исследовать управляемость системы.

б) Для полностью управляемых систем найти управляющую последовательность, которая приводит систему к нулевому состоянию из начального состояния  $x[0] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

9. Пусть все собственные числа  $s_i$  матрицы  $A$  системы  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}$ , одинаковы и равны  $\lambda$  [174]. Показать, что система является полностью управляемой в том, и только том, случае, когда матрица  $A$  состоит из единственной жордановой клетки, а матрица  $B$  (в том же базисе) имеет ненулевой элемент в последней строке. Показать структурную схему для интерпретации полученного результата.

10. Показать, что обратная связь по состоянию не нарушает управляемости, а именно, если система (7.7) полностью управляема, то полностью управляемой будет и система  $x[k+1] = (A - BK)x[k] + Bu[k]$  [174]. (Указание: Прежде,

чем использовать ранговый критерий управляемости, обратиться к определению управляемости.)

11.. Пусть агрегированная система задана уравнениями [174]

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

и выход  $y(t)$  – полностью наблюдаемый. Показать, что пара  $(A_{11}, A_{21})$  полностью наблюдаема. (Указание: для упрощения рассуждений можно показать полную управляемость дуальной системы, см. с. 174).

12. Рассмотрим две динамические системы [174]

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t), \\ y(t) = \alpha x_1(t) + x_2(t), \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_3(t) = x_3(t) + w(t), \\ z(t) = x_3(t), \end{cases}$$

где  $\alpha$  – параметр.

а) Исследовать устойчивость, управляемость, наблюдаемость систем  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1$ .

б) При последовательном соединении систем ( $w(t) = y(t)$ ) получается система  $\mathcal{S}_3$ . Исследовать устойчивость, управляемость и наблюдаемость этой системы.

в) При соединении с обратной связью получается система  $\mathcal{S}_4$  (см. рис. 7.4). Провести указанные исследования для этой системы.

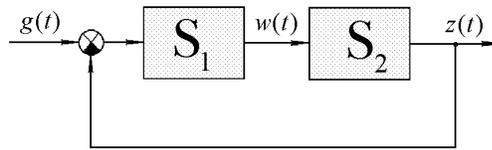


Рис. 7.4. Структурная схема к задаче 12 в).

## 8. ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА И ВОЗМУЩЕНИЙ

### 8.1. Постановка задачи оценивания состояния

В настоящем параграфе приводятся некоторые сведения из *теории оценивания*. Рассматриваются задача получения информации о состоянии системы на основе измерений только ее входа и выхода и, кроме того, задача оценивания возмущений.

При наличии информации о текущих значениях переменных состояния объекта может быть решена задача модального управления – обеспечения заданных значений коэффициентов характеристического многочлена. Кроме того, решение различных задач оптимального управления процессами основано на использовании значений всего вектора состояния. Актуальной является также задача оценивания неизменяемых возмущений для организации *комбинированного управления*. В реальных условиях измерение вектора состояния, как правило, неосуществимо из-за необходимости установки датчиков в труднодоступных местах, измерения производных высоких порядков и так далее. Еще более сложной задачей является измерение возмущений. Преодолеть (или уменьшить) эти трудности можно, если наиболее полно использовать имеющуюся априорную информацию о модели объекта и текущие измерения его входов и выходов. С этой целью в систему управления вводится подсистема (алгоритм) оценивания состояния объекта и возмущений [3, 8, 47, 76, 88, 93].

Различают три типа оценок состояния:

- *сглаживание* – по текущим данным определяется поведение системы в прошлом, т.е. по результатам измерений к моменту времени  $t$  оценивается состояние системы на момент  $t - T$ ,  $T > 0$ ;
- *фильтрация* – по текущим данным определяется состояние системы в тот же самый момент времени;
- *прогноз* – производится экстраполяция результатов измерений, т.е. по данным к моменту времени  $t$  оценивается состояние системы в будущем, на момент  $t + T$ ,  $T > 0$ .

Таким образом, оценивание является задачей восстановления состояния системы по доступной текущей информации о ее входах и выходах. Эта задача принципиально разреши-

ма, если имеется взаимно-однозначное соответствие между переменными вход-выход и состоянием объекта. Это соответствие имеется для полностью наблюдаемых объектов.<sup>1</sup>

В системах управления наиболее распространены оценки типа "фильтрация". При таких оценках темп оценивания совпадает с темпом получения информации, что существенно для построения систем реального времени. Ниже будет рассматриваться именно задача фильтрации применительно к линейным объектам управления.

Рассмотрим модель объекта в виде уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния объекта;  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^l$  – входной и выходной векторы;  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  – известные матричные функции. Объект подвержен действию *возмущений*  $f(t)$  и "*шума (погрешности) измерений*"  $v(t)$ . Считается, что при работе системы доступны измерению процессы  $u(t)$ ,  $y(t)$ , а  $x(t)$ ,  $f(t)$ ,  $v(t)$  – недоступны. Рассматривается задача получения *оценки состояния объекта*  $\hat{x}(t)$ . Процесс  $\hat{x}(t)$ , полученный с помощью некоторого алгоритма, должен в определенном (например, в асимптотическом) смысле приближаться к процессу  $x(t)$  ( $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ) независимо от исходного начального состояния объекта  $x_0$ . Как показано в следующем параграфе, для полностью наблюдаемого стационарного объекта при отсутствии возмущений можно получить асимптотически точную оценку состояния с любым заданным временем переходного процесса.<sup>2</sup> Влияние возмущений и шумов измерения приводит к появлению ошибок оценивания. Некоторый анализ этого влияния будет дан в следующем параграфе.

---

<sup>1</sup> Кроме того, предполагается, что имеется достаточно полная априорная информация об объекте в виде его математической модели и параметров. Задачи с неполной априорной информацией относятся к *адаптивным*. Сведения о методах их решения можно получить из п. 12.3. (с. 307) данной книги, из книги [64], а также из работ [8, 23, 76, 93, 103, 106, 191].

<sup>2</sup> Более того, полная наблюдаемость теоретически позволяет построить алгоритм оценивания, обладающий конечным временем сходимости оценок состояния. Однако реализация такого алгоритма затруднена из-за влияния параметрических и координатных возмущений, а также сложностей вычислительного характера.

**З а м е ч а н и е .** Уравнения (8.1) соответствуют системе непрерывного времени. Задача оценивания рассматривается также для дискретных систем, поэтому ниже наряду с (8.1) будут использованы разностные уравнения

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] + f[k], \\ y[k] &= C[k]x[k] + v[k], \quad x[t_0] = x_0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \end{aligned} \quad (8.2)$$

Дискретный алгоритм оценивания задается разностным уравнением и служит для получения оценки состояния  $\hat{x}[k]$ .

## 8.2. Наблюдатели состояния

*Наблюдатель состояния (идентификатор состояния, наблюдающее устройство, наблюдатель)* можно представить в виде модели объекта управления, на вход которой поступает то же управляющее воздействие, что и на объект управления и, кроме того, дополнительный сигнал коррекции (обратной связи). Этот сигнал получается из невязки между выходами объекта и модели (рис. 8.1).

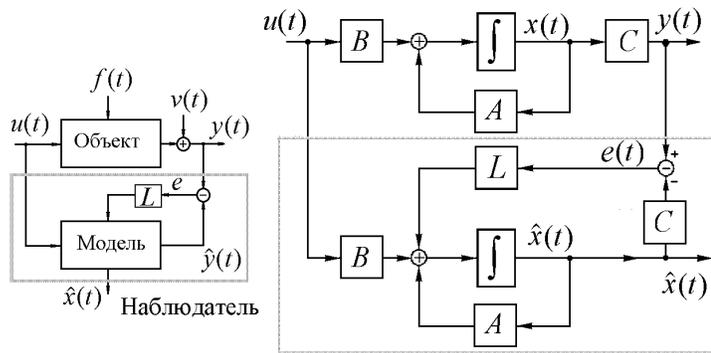


Рис. 8.1. Принцип построения и структурная схема наблюдателя.

Его влияние придает поведению модели качественно новые свойства (отличные от свойств объекта). Собственные движения модели и объекта оказываются различными, но переменные состояния модели служат оценками состояния объ-

екта. Для систем непрерывного времени наблюдатель описывается уравнением

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C(t)\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \quad t \geq t_0.\end{aligned}\quad (8.3)$$

Здесь  $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния наблюдателя, служащий оценкой состояния объекта;  $\hat{y}(t) \in \mathcal{R}^l$  – вектор выхода;  $L(t)$  –  $n \times l$ -матрица коэффициентов обратной связи по невязке между выходами объекта и наблюдателя. Синтез наблюдателя заключается в выборе матрицы  $L(t)$ .

Отметим, что мы рассматриваем наблюдатель, у которого размерность вектора состояния такая же, как и у объекта (так называемый *наблюдатель полного порядка*, или *наблюдатель Калмана*). Однако это условие необязательно: встречаются наблюдатели как пониженного порядка (см. ниже ”наблюдатель Луенбергера”), так и повышенного порядка (адаптивные наблюдатели, см. п. 12.6.5.).

Для исследования работы наблюдателя рассмотрим *ошибку оценивания*  $\varepsilon(t) \triangleq (x(t) - \hat{x}(t))$ . Вычитая из (8.1) уравнение (8.3), получаем уравнение для ошибки

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= (A(t) - L(t)C(t)) \varepsilon(t) + f(t) - L(t)v(t), \\ \varepsilon(t_0) &= \varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0, \quad t \geq t_0.\end{aligned}\quad (8.4)$$

Как видно из этого уравнения, источниками ошибки  $\varepsilon(t)$  являются начальное рассогласование  $\varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0$ , возмущение  $f(t)$  и помеха измерений  $v(t)$ . Динамика переходного процесса ошибки  $\varepsilon(t)$  определяется матрицей  $A_n(t) \triangleq A(t) - L(t)C(t)$ .

Исследуем поведение процесса  $\varepsilon(t)$  для стационарного случая, когда матрицы  $A, B, C, L$  не зависят от времени.<sup>3</sup> Динамика переходного процесса в таких системах определяется корнями характеристического многочлена наблюдателя  $\det(s\mathbf{I}_n - A_n)$ , т.е. собственными числами матрицы  $A_n = A - LC$ . Если они имеют отрицательные вещественные части, а возмущения  $f(t)$  и шумы  $v(t)$  отсутствуют, то процесс оценивания асимптотически устойчив и  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любых начальных значений  $x_0, \hat{x}_0$ . Матрица  $A_n$  зависит от параметров объекта управления (матриц  $A, C$  в (8.1)) и матрицы  $L$ ,

<sup>3</sup> Именно стационарные системы и будут рассмотрены в настоящей главе. Сведения о нестационарных алгоритмах оценивания приведены, например, в [3, 47].

выбор которой определяется проектировщиком. Как следует из приведенных выше в п. 7.3. критериев, для полностью наблюдаемого объекта всегда имеется такая матрица  $L$ , что собственные числа матрицы  $A_n$  будут заданными. Следовательно, выбором  $L$  можно обеспечить требуемое быстродействие процесса оценивания.<sup>4</sup> При отсутствии сигнала коррекции ( $L = 0$ ) динамика процесса оценивания полностью определяется динамикой объекта. В частности, для неустойчивых и нейтрально-устойчивых объектов асимптотическое оценивание было бы неосуществимо. Матрица  $A_n$ , а следовательно и  $L$ , влияет также на точность процесса оценивания при внешних воздействиях. Как видно из (8.4), это влияние оказывается разным по отношению к возмущениям  $f(t)$ , с одной стороны, и помехам измерений  $v(t)$  – с другой. Поэтому при определении  $L$  следует учитывать характеристики внешних воздействий и обеспечивать компромисс между требованиями быстродействия и точности системы. Обычно повышение быстродействия связано с увеличением элементов матрицы  $L$  и, следовательно, с подавлением влияния возмущений и подчеркиванием действия помех измерения. Для более детального анализа можно использовать передаточные функции по ошибке от возмущений  $W_f^\varepsilon(s)$  и помех  $W_v^\varepsilon(s)$ , определяемые формулами

$$W_f^\varepsilon(s) = (s\mathbf{I}_n - A + LC)^{-1}, \quad W_v^\varepsilon(s) = -(s\mathbf{I}_n - A + LC)^{-1}L.$$

Оптимальный (в смысле минимума дисперсии  $\|\varepsilon(t)\|$ ) выбор матрицы  $L$  при действии случайных возмущений и помех приводит к *оптимальному фильтру Калмана-Бьюси* [47].

Рассмотрим определение  $L$  из условий быстродействия.

Характеристический многочлен наблюдателя представим в виде

$$\det(s\mathbf{I}_n - A_n) \equiv \det(s\mathbf{I}_n - A + LC) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n. \quad (8.5)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  зависят от параметров объекта и матрицы  $L$ . Приравнивая их к заданным значениям, получаем систему  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно

---

<sup>4</sup> Следует, правда, отметить, что величина перерегулирования  $\varepsilon(t)$  может оказаться значительной. Время переходного процесса характеризует скорость затухания величины относительной ошибки.

искомых  $n \cdot l$  элементов матрицы  $L$ . При полной наблюдаемости объекта данная система имеет решение для любых  $A, C, \alpha_i$  (при  $l = 1$  это решение единственно). Если измерению доступно несколько выходных переменных ( $l > 1$ ), то матрица  $L$  определяется неоднозначно. Следовательно, при выборе  $L$  можно учесть дополнительные требования по ошибкам от внешних воздействий и соответственно перераспределить коэффициенты передачи. Решение задачи синтеза можно выполнять алгебраическими методами с использованием специальных канонических форм уравнений состояния (см., например, [3]). Для определения желаемых коэффициентов характеристического многочлена (8.5) рекомендуется использовать стандартные формы, например *биномиальную* форму, или форму *Баттерворта*: [47, 76]

$$\det(s\mathbf{I}_n - A_n) = \prod_{\nu=1}^n \left( \frac{s}{\omega_0} - e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)} \right),$$

где параметр  $\omega_0$  – среднегеометрический корень многочлена определяет быстродействие наблюдателя.

Для дискретного объекта управления (8.2) наблюдатель состояния описывается разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1] &= A[k]\hat{x}[k] + B[k]u[k] + L[k](y[k] - \hat{y}[k]), \\ \hat{y}[k] &= C[k]\hat{x}[k], \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

В стационарном случае его динамика определяется характеристическим многочленом  $\det(z\mathbf{I}_n - A_n) \equiv \det(z\mathbf{I}_n - A + LC)$ , корни  $z_i$  которого из условия устойчивости должны быть по модулю меньше единицы. Свойства дискретного наблюдателя и процедура синтеза аналогичны изложенным выше для непрерывного случая. Заметим, что для (8.6) матрица  $L$  может быть выбрана из условия  $z_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , что дает конечное время переходного процесса оценивания, не превышающее  $nT_0$ , где  $n$  – порядок системы,  $T_0$  – интервал квантования.<sup>5</sup>

Как отмечено выше, для построения систем оценивания, обладающих заданными динамическими свойствами, требуется полная наблюдаемость объекта управления. Если для

<sup>5</sup> Точнее говоря, переходный процесс завершается не более, чем за  $n$  шагов, что в системах реального времени с постоянным периодом квантования  $T_0$  соответствует указанному временному интервалу.

объекта это свойство не выполняется, но он является обнаруживаемым (см. определение 8 в п. 7.1.) то устойчивость процесса оценивания может быть обеспечена, однако нельзя получить произвольное заданное расположение корней многочлена (8.5).

### 8.3. Наблюдатели пониженного порядка

Выше рассматривались так называемые *наблюдатели полного порядка*, или *наблюдатели Калмана*, размерность вектора состояния которых совпадает с порядком уравнений объекта и равна  $n$ . Можно уменьшить порядок наблюдателя, используя непосредственно содержащуюся в выходных переменных информацию о состоянии объекта. Это дает возможность построить алгоритм оценивания порядка  $n - p$ , где  $p = \text{rang } C$  (обычно  $p = l$ .) Такие идентификаторы состояния называются *наблюдателями пониженного порядка*, или *наблюдателями Луенбергера* [3, 174].

Рассмотрим стационарный полностью наблюдаемый объект, уравнения которого имеют вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t). \quad (8.7)$$

Пусть ранг  $p \times n$ -матрицы  $C$  равен  $p$ .

Для упрощения вида уравнения выхода выполним преобразование базиса в (8.7). Выберем произвольную  $(n - p) \times n$ -матрицу  $V$  так, чтобы матрица

$$T \triangleq \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix}$$

была невырожденной. Последнее всегда возможно, так как  $\text{rang } C = p$ . Введем теперь новый вектор состояния  $\bar{x}(t) \triangleq Tx(t)$  и представим его в виде

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n - p \\ \} p \end{matrix},$$

где  $w(t) \in \mathcal{R}^{n-p}$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$ , т.е. выходы объекта совпадают в выбранном базисе с последними  $p$  компонентами его вектора состояния. Выполнив преобразование базиса с матрицей  $T$ , перейдем к уравнениям состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t). \quad (8.8)$$

Из этой системы можно выделить подсистему порядка  $n - p$  с известными (доступными измерению) входами  $u(t), y(t)$ . Более того, для этой подсистемы всегда можно обеспечить заданные коэффициенты характеристического многочлена.

Для этого умножим второе уравнение в (8.8) на произвольную  $(n - p) \times p$ -матрицу  $E$  и сложим полученное выражение с первым уравнением. Получим

$$\dot{w}(t) - E\dot{y}(t) = (A_{11} - EA_{21})w(t) + (A_{12} - EA_{22})y(t) + (B_1 + EB_2)u(t).$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) - E\dot{y}(t) = & (A_{11} - EA_{21})(w(t) - Ey(t)) + \\ & + (A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22})y(t) + (B_1 - EB_2)u(t). \end{aligned}$$

Введя  $v(t) \triangleq w(t) - Ey(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = & (A_{11} - EA_{21})v(t) + \\ & + (A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22})y(t) + (B_1 - EB_2)u(t). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь  $v(t)$  – неизмеряемый вектор состояния, в то время как  $u(t), y(t)$  измеряются. Введем наблюдатель, уравнение которого в точности повторяет уравнение для  $v(t)$ , а именно

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}(t) = & (A_{11} - EA_{21})\hat{v}(t) + \\ & + (A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22})y(t) + (B_1 - EB_2)u(t). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Как и выше, вычитая (8.9) из (8.10), найдем уравнение для ошибки оценивания  $\hat{v}(t) - v(t)$ :

$$\dot{\hat{v}}(t) - \dot{v}(t) = (A_{11} - EA_{21})(\hat{v}(t) - v(t)).$$

Из полученного уравнения следует, что  $\hat{v}(t) - v(t) \rightarrow 0$ , причем динамика ошибки определяется собственными числами матрицы  $A_{11} - EA_{21}$ .

Получив оценку вектора  $v(t)$ , нетрудно перейти к оценке всего вектора состояния как в каноническом (8.8), так и в исходном базисе. Оценки  $\hat{w}(t), \hat{y}(t)$  вектора  $\bar{x}(t)$  получаются в виде

$$\hat{w}(t) = \hat{v}(t) + Ey(t), \quad \hat{y}(t) = y(t).$$

Обратным преобразованием с матрицей  $T^{-1}$  получаем оценку  $\hat{x}(t)$  вектора состояния системы (8.7).

Качество полученной оценки состояния в значительной степени определяется матрицей  $A_{11} - EA_{21}$ . Можно показать (см. задачу п. 11 на с. 180), что если исходная система (8.8) полностью наблюдаема, то этим же свойством обладает и пара  $(A_{11}, A_{21})$ . Следовательно, могут быть обеспечены произвольно заданные значения коэффициентов характеристического многочлена наблюдателя путем подходящего выбора матрицы  $E$ .

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

**Балансировка стержня.** Рассмотрим задачу стабилизации стержня в вертикальном положении ([174]).<sup>6</sup> Пусть стержень имеет длину  $l$  и вся масса сосредоточена на его верхнем конце (т.е. рассматривается обращенный математический маятник). Уравнение динамики стержня относительно угла отклонения от вертикали  $\varphi(t)$ , согласно закону Ньютона, имеет вид

$$\ddot{u}(t) \cos \varphi + l\ddot{\varphi}(t) = g \sin \varphi(t), \quad (8.11)$$

где  $g \approx 9.81$  – ускорение свободного падения;  $u(t)$  – управляющее воздействие – горизонтальное перемещение основания стержня (рис. 8.2). Кроме того, выполнено геометрическое соотношение

$$x(t) = u(t) + l \sin \varphi(t). \quad (8.12)$$

Выполняя линеаризацию относительно вертикального состояния равновесия, приведем уравнения (8.11), (8.12) относительно  $x(t)$  к виду

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l}(x(t) - u(t)).$$

Введем горизонтальную скорость перемещения  $v(t) \triangleq \dot{x}(t)$ . Отсюда получим уравнения состояния системы

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & gl^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gl^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

---

<sup>6</sup> Эта задача может рассматриваться, как упрощенный вариант задачи управления обращенным маятником на тележке (см. с. 30) и служить приближением к таким сложным задачам управления, как стабилизация углового положения ракеты-носителя [19], обеспечение движения спутника по заданной траектории, управления самолетом [23, 19, 98], вертолетом и так далее.

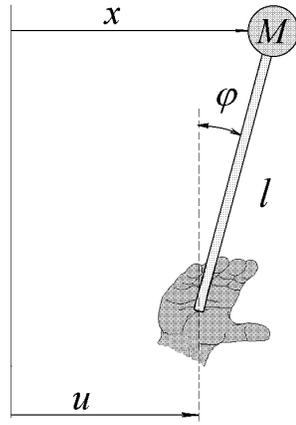


Рис. 8.2. Балансировка стержня.

Матрица управляемости равна

$$Q_y = \begin{bmatrix} -gl^{-1} & 0 \\ 0 & -gl^{-1} \end{bmatrix}.$$

Так как  $\det Q \neq 0$ , то рассматриваемая система полностью управляема и при наличии полной информации о векторе состояния может быть стабилизирована обратной связью.

Обратимся теперь к задаче оценивания состояния. Пусть измеряется только отклонение  $x(t)$  ( $u(t)$  также считается известным). Уравнение выхода тогда имеет вид  $y(t) = [0, 1]x(t)$ , где  $y(t)$  – измеряемый выход объекта. Матрица наблюдаемости

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det Q_n = -1.$$

Таким образом, рассматриваемая система является и полностью наблюдаемой (следовательно – невырожденной). Идентификатор полного порядка (8.3) для нее будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\hat{v}}(t) = (1 - l_1)\hat{x}(t) + l_1x(t) - gl^{-1}u(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) = gl^{-1}\hat{v}(t) + l_2(\hat{x}(t) - x(t)). \end{cases} \quad (8.13)$$

Здесь  $l_1, l_2$  – параметры наблюдателя, выбор которых выполняется по заданным значениям коэффициентов характеристического многочлена  $\det(s\mathbf{I} - A_n) = s^2 + l_2s + g(l_1 - 1)l^{-1}$ .

Идентификатор (8.13) использует измерения  $u(t), x(t)$  для получения оценок  $\hat{v}(t), \hat{x}(t)$ . Если не ставить задачу фильтрации шумов измерений, то вторая оценка является лишней и можно уменьшить порядок алгоритма оценивания, используя наблюдатель Луенбергера (8.10).

Заметим, что в рассматриваемом примере уравнения объекта уже имеют требуемую каноническую форму (8.8) и преобразования базиса выполнять не надо, а можно сразу записать уравнения наблюдателя (8.10). В данном примере матрицы (скалярные коэффициенты)  $A_{11} = A_{22} = 0, A_{21} = 1, A_{12} = gl^{-1}, B_1 = -gl^{-1}$ , поэтому (8.10) принимает вид

$$\dot{\hat{v}}(t) = -e\hat{v}(t) + (gl^{-1} - e^2)x(t) - gl^{-1}u(t).$$

Здесь  $e$  – подлежащий выбору параметр наблюдателя. Получим характеристический многочлен  $\det(s\mathbf{I} - A_n) = s + el^{-1}$ . Поэтому  $e = -s_1l$ , где  $s_1$  – требуемое значение корня характеристического многочлена наблюдателя.

В работе [3] синтез наблюдателей Луенбергера рассмотрен более детально. Приведем (устраняя некоторые имеющиеся в [3] опечатки) описанную там процедуру синтеза  $(n - 1)$ -мерных наблюдателей для систем со скалярным выходом (точнее, при  $\text{rank } C = 1$ ).

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Уравнения состояния системы (матрицы  $A, B, C$ ) невырожденным преобразованием приводим к виду ИКП (см. с. 77, а также пункт "г" задачи 2 на с. 97).

2. Задаемся желаемыми коэффициентами  $\beta_i$  характеристического многочлена наблюдателя  $(\det \mathbf{I}_{n-1} - A_n) = s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$ .

3. Строим матрицу преобразования  $P$  вида

$$P = \begin{bmatrix} & & & -\beta_{n-1} \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & -\beta_{n-2} \\ & & \dots & \\ & & & -\beta_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \beta_{n-1} \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \beta_{n-2} \\ & & \dots & \\ & & & \beta_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что если матрица  $A$  приведена к виду

ИКП, то в результате преобразования получим

$$\tilde{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} & (\alpha_1 - \beta_1)\beta_{n-1} - \alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-2} & (\alpha_1 - \beta_1)\beta_{n-2} - \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_1 & (\alpha_1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_1 + \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{и также } \tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} b_1 - \beta_{n-1}b_n \\ b_2 - \beta_{n-2}b_n \\ \dots \\ b_{n-1} - \beta_1b_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

4. Из матрицы  $\tilde{A}$  выделим подматрицу  $\bar{A}$  порядка  $n - 1$ , расположенную в верхнем левом углу матрицы  $\tilde{A}$ , а также первые  $n-1$  строк матрицы  $\tilde{B}$ , из которых образуем матрицу (вектор-столбец)  $\bar{B}$ . Обозначим  $n - 1$  верхние строки последнего столбца матрицы  $\tilde{A}$  через  $\bar{a}_n$ .

Запишем уравнения наблюдателя Луенбергера:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{a}_ny(t) + \bar{B}u(t). \quad (8.14)$$

Для вычисления оценки вектора состояния в исходном базисе (считаем, что исходная система уже имеет вид ИКП), сформируем вектор  $\tilde{x}(t) = \text{col}\{\tilde{x}(t), y(t)\}$ . Оценка состояния в базисе ИКП тогда получается по формуле  $\hat{x}(t) = P^{-1}\tilde{x}(t)$ .

#### 8.4. Оценивание возмущений

Как видно из (8.4), неизмеряемые внешние воздействия (возмущения и помехи) приводят к появлению дополнительных составляющих ошибки оценивания переменных состояния и снижают точность системы управления. Уменьшить влияние возмущений можно, если выполнять, наряду с оцениванием состояния объекта, также идентификацию неизмеряемых внешних воздействий.

Основная идея использования наблюдателей для оценивания возмущений и помех измерения состоит в следующем.

Для внешних воздействий, как и для объекта управления, строится некоторая математическая модель ("модель внешней среды", или "internal model of disturbances"). Согласно

этой модели, возмущения представляются как решения системы однородных дифференциальных (или разностных) уравнений с известными коэффициентами и неизвестными начальными условиями. В этих начальных условиях и содержится вся неопределенность относительно внешних воздействий.<sup>7</sup> Таким образом, возмущения и помехи представляются, как выходы некоторой автономной динамической системы с заданными уравнениями и неизвестным начальным состоянием. Затем модель внешних воздействий объединяется с моделью объекта управления и для полученной *расширенной системы* строится наблюдатель. Полученные с помощью него оценки содержат как собственно оценки состояния объекта, так и оценки внешних воздействий<sup>8</sup>.

Подход к синтезу систем управления на основе постулирования динамических моделей для отдельных подсистем и сигналов в настоящее время нашел широкое применение и называется "*принципом внутренних моделей*" ("*internal model principle*"). Для построения эффективных алгоритмов проектирования, оценивания, управления системами модели в виде уравнений состояния могут задаваться не только для возмущающих воздействий, но и для помех измерений, командных сигналов ("*эталонные модели*"), динамики изменения параметров объекта и т.д.<sup>9</sup>

Достаточно просто процедура синтеза выглядит, если внешние процессы можно представить как *квазимногочлены* – выражения вида  $\sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} P_i(t)$ , где  $\lambda_i \in \mathcal{C}$  – известные постоянные,  $P_i(t)$  – многочлены с заданными коэффициентами. Сюда относятся степенные функции, гармоники с заданной частотой, экспоненты с заданным показателем затухания, произведения гармоник на экспоненты и линейные комбинации этих функций. Моделями источников таких процессов являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим процедуру оценивания для этого случая

<sup>7</sup> Случай неизвестных параметров модели среды рассматривается в рамках *теории адаптивного оценивания* (см. главу 12 и [93, 76, 103, 106]).

<sup>8</sup> Естественно, требуется полная наблюдаемость расширенной системы.

<sup>9</sup> Иллюстраций применения этого принципа может служить и алгоритм перехода к дискретной модели, описанный в 6.6.

более подробно.

Пусть внешние воздействия  $f(t)$ ,  $v(t)$  можно представить в виде выходных процессов линейной системы, заданной уравнениями

$$\dot{x}_s(t) = A_s(t)x_s(t), \quad y_s(t) = C_s x_s(t), \quad x_s(t_0) = x_{s_0}, \quad t \geq t_0. \quad (8.15)$$

Здесь  $x_s(t) \in \mathcal{R}^{n_s}$  – вектор состояния "среды",  $y_s(t) \in \mathcal{R}^{n+l}$  – выход модели источника возмущений – вектор внешних по отношению к объекту воздействий;  $y_s(t) \triangleq \text{col}\{f(t), v(t)\}$ ,  $A_s, C_s$  – известные матрицы,  $C_s = \begin{bmatrix} C_f \\ C_v \end{bmatrix}$ ;  $C_f, C_v$  – подматрицы размеров  $n \times n_s$ ,  $l \times n_s$ , определяющие связь между состоянием  $x_s(t)$  модели внешних воздействий и возмущениями  $f(t)$ , помехами  $v(t)$  в (8.1). Начальное состояние  $x_{s_0}$  системы (8.15), как и (8.1), считается неизвестным. Введем расширенный ("совокупный") вектор состояния объекта и среды  $\bar{x}(t) \triangleq (x(t), x_s(t)) \in \mathcal{R}^{n+n_s}$ . Объединяя уравнения (8.1), (8.15), получим уравнения расширенной системы в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad y(t) = \bar{C}\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \geq t_0, \quad (8.16)$$

в которых матрицы  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  имеют следующую блочную структуру:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & C_f \\ \mathbf{0}_{n_s \times n} & A_s \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0}_{n_s \times m} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C, C_v].$$

Расширенная система (8.16) рассматривается как некоторый новый объект порядка  $\bar{n} = n + n_s$ , для которого строится наблюдатель (8.3).

Проиллюстрируем изложенное на примере.

Рассмотрим упрощенную модель углового движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) по крену

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} = u(t) + M(t), \quad (8.17)$$

где  $J_x$  – момент инерции ИСЗ относительно продольной оси,  $\gamma(t)$  – угол крена,  $u(t)$  – управляющий момент,  $M(t)$  – возмущающий момент. Пусть доступна измерению угловая скорость крена  $\omega_x(t) \triangleq \dot{\gamma}(t)$ . Значения  $u(t)$  также считаются известными. Подлежит оцениванию неизмеряемый момент возмущений  $M(t)$ . Будем полагать его линейной функцией времени  $M(t) = M_0 + Vt$ , причем  $M_0, V$  – неизвестные величины.

Этот процесс можно представить как решение системы однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = V(t), \\ \dot{V}(t) = 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

с неизвестными начальными условиями  $M(0)$ ,  $V(0)$ . Введем вектор состояния системы "объект – среда"  $\bar{x}(t) \triangleq [\omega_x(t), M(t), V(t)]^T$ . Выход системы  $\bar{y}(t) = \omega_x(t)$ . Таким образом, приходим к уравнениям состояния вида (8.16), в которых

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [1, 0, 0]. \quad (8.19)$$

Обратимся к синтезу наблюдателя. Наблюдатель полного порядка (8.3) для системы (8.17), (8.18) имеет размерность  $\bar{n} = 3$ . Переменные состояния наблюдателя  $\bar{x}_1(t)$ ,  $\bar{x}_2(t)$ ,  $\bar{x}_3(t)$  служат оценками переменных  $\omega_x(t)$ ,  $M(t)$ ,  $V(t)$  соответственно. Для определения трехмерного вектора параметров  $L$  наблюдателя найдем характеристический многочлен  $\det(s\mathbf{I}_3 - \bar{A} + L\bar{C}) = s^3 + l_1s^2 + \frac{l_2}{J_x}s + \frac{l_3}{J_x}$ . Приравняв его к стандартному многочлену Баттерворта

$A_n(s) = s^3 + 2\Omega_0s^2 + 2\Omega_0^2s + \Omega_0^3$ , получим выражения для  $l_i$ :  $l_1 = 2\Omega_0$ ,  $l_2 = 2J_x\Omega_0^2$ ,  $l_3 = J_x\Omega_0^3$ . Параметр  $\Omega_0$  задает быстродействие наблюдателя. Время переходного процесса составляет примерно  $5/\Omega_0$ . В развернутой форме уравнения наблюдателя (8.3) принимают в данном случае вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{\omega}}_x(t) = -l_1\hat{\omega}_x(t) + \hat{M}(t)/J_x + l_1\omega_x(t) + u(t)/J_x, \\ \dot{\hat{M}}(t) = -l_2\hat{\omega}_x(t) + \hat{V}(t) + l_2\omega_x(t), \\ \dot{\hat{V}}(t) = -l_3\hat{\omega}_x(t) + l_3\omega_x(t). \end{cases} \quad (8.20)$$

Для иллюстрации на рис. 8.3 (сплошная линия) приведены результаты моделирования системы (8.17), (8.20) при следующих значениях параметров объекта и воздействий:

$J_x=54.3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $M(0)=0.25 \text{ Нм}$ ,  $V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Нм/с}$ . Выбрано  $\Omega_0=0.5 \text{ 1/с}$ .

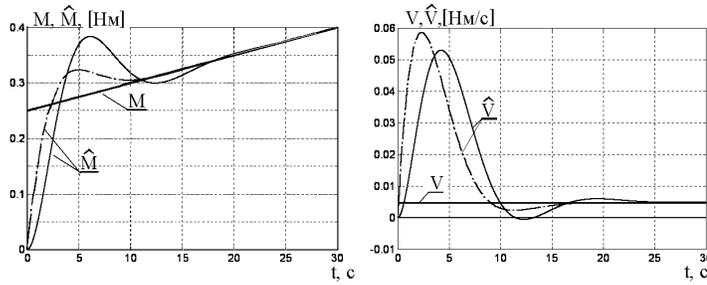


Рис. 8.3. Процесс оценивания возмущений.

Для моделирования использована следующая MATLAB-программа

Программа моделирования наблюдателя состояния и возмущений для ИСЗ по Калману.

```

x0_=[0, 0, 0]';  x0=[0 0.25 0.005]';
- задание начального расширенного вектора  $\bar{x} \triangleq \text{col}\{\gamma_x, M, V\}$ ;
A=[0 1/J 0; 0 0 1; 0 0 0];
B=[1/J; 0; 0];  C=[1 0 0];
- ввод матриц  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  уравнений состояния расширенного
объекта;
Om=0.5;  I1=2*Om;  I2=2*J*Om^2;  I3=J*Om^3;
- ввод значения  $\Omega_0$  и вычисление коэффициентов обратной
связи  $l_1, l_2, l_3$ ;
L=[I1; I2; I3];  A_=A-L*C;  B_=B;
- формирование матриц уравнений (8.20);
Ae=[A, zeros(3,3); L*C, A_];  Be=[B; B];  Ce=[C, -C];
- формирование матриц объединенной системы (8.17), (8.20);
xe0=[x0; x0_];
- задание начального состояния системы (8.17), (8.20);
t=0:0.01:30;  u=zeros(size(t));
- задание интервала моделирования и формирование вход-
ного воздействия;
[y,xe] =lsim(Ae,Be,Ce,0,u,t,xe0);
- моделирование;
plot(t,xe(:,2),'w',t,xe(:,5),'w'),grid
plot(t,xe(:,3),'w',t,xe(:,6),'w'),grid

```

– вывод графиков.

Рассмотрим теперь использование для решения этой задачи наблюдателя Луенбергера (см. 8.3. с. 187).

В качестве исходной модели объекта возьмем уравнения расширенной системы (8.17), (8.18) с матрицами (8.19).<sup>10</sup> Согласно изложенному на с. 191 алгоритму, уравнения состояния системы сначала приводятся к виду ИКП. Для этого, в соответствии с общей формулой (3.13) (см. с. 88, 3.2.3.) строятся матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{C}$  требуемого канонического вида. Получим

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0, 0, 1].$$

Найдем матрицы наблюдаемости  $Q$  исходной системы и  $\tilde{Q}$  – системы вида ИКП, откуда получим матрицу преобразования  $T$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_x^{-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \tilde{Q}^{-1}Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_x^{-1} \\ 0 & J_x^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выберем желаемый вид характеристического многочлена наблюдателя в форме многочлена Баттерворта второго порядка  $A_n(s) = s^2 + \sqrt{2}\Omega_0 s + \Omega_0^2$ , где параметр  $\Omega_0$  задает быстродействие наблюдателя. Тогда  $\beta_1 = \sqrt{2}\Omega_0$ ,  $\beta_2 = \Omega_0^2$ .

Построим матрицу преобразования  $P$  к указанному в п. 8.3. каноническому виду

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Omega_0^2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\Omega_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Omega_0^2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}\Omega_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>10</sup>Для упрощения обозначений далее в данном примере знак  $\sim$  у матриц (8.19) опускается.

Теперь построим матрицы

$$\check{A} = P\check{A}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_0^2 & -\sqrt{2}\Omega_0^3 \\ 1 & -\sqrt{2}\Omega_0 & -\Omega_0^2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}\Omega_0 \end{bmatrix}, \check{B} = \begin{bmatrix} -\Omega_0^2 J_x^{-1} \\ -\sqrt{2}\Omega_0 J_x^{-1} \\ J_x^{-1} \end{bmatrix}$$

Из матрицы  $\check{A}$  подматрицу  $\bar{A}$  второго порядка, а также выделим первые две строки матрицы  $\check{B}$ , из которых образуем вектор-столбец  $\bar{B}$ . Получим

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_0^2 \\ 1 & -\sqrt{2}\Omega_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\Omega_0^3 \\ -\Omega_0^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -\Omega_0^2 J_x^{-1} \\ -\sqrt{2}\Omega_0 J_x^{-1} \end{bmatrix}.$$

Приходим к уравнениям наблюдателя второго порядка

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = -\Omega_0^2 \bar{x}_1(t) - \sqrt{2}\Omega_0^3 \omega_x(t) - \Omega_0^2 J_x^{-1} u(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_1(t) - \sqrt{2}\Omega_0 x_2(t) - \Omega_0^2 \omega_x(t) - \sqrt{2}\Omega_0 J_x^{-1} u(t). \end{cases} \quad (8.21)$$

Далее сформируем вектор  $\check{x}(t) = \text{col}\{\bar{x}(t), \omega_x(t)\}$ . Для получения оценки состояния в исходном базисе (8.17), (8.18) найдем матрицу обратного перехода  $T_b$  – сначала от  $\check{x}$  к  $\bar{x}$ , затем – к  $x$ :

$$T_b = T^{-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & J_x & J_x \sqrt{2}\Omega_0 \\ J_x & 0 & J_x \Omega_0^2 \end{bmatrix}.$$

Вектор  $\hat{x}(t) = T_b \check{x}(t)$  содержит оценки  $\hat{\omega}_x(t)$ ,  $\hat{M}(t)$  и  $\hat{V}(t)$ . В явном виде оценка процесса возмущений выражается соотношениями

$$\begin{cases} \hat{M}(t) = J_x \bar{x}_1(t) + J_x \sqrt{2}\Omega_0 \bar{x}_2(t), \\ \hat{V}(t) = J_x \omega_x(t) + J_x \Omega_0^2 \bar{x}_2(t). \end{cases} \quad (8.22)$$

Совокупность уравнений (8.21), (8.22) описывает наблюдатель Луенбергера для рассматриваемой задачи.

Вычисления для данного примера с выводом результатов в символьном (а не только в числовом) виде могут быть выполнены с помощью следующей программы пакета MATLAB [82].

Программа моделирования наблюдателя состояния и возмущений для ИЗС по Луенбергеру

```

syms Jx Om
- описание символьных переменных  $J_x, \Omega_0$ ;
A=[0 1/Jx 0; 0 0 1; 0 0 0]
B=[1/Jx 0 0 ]';
C=[1 0 0 ]
- формирование символьных матриц (8.19);
A_=[0 0 0; 1 0 0; 0 1 0];
C_=[0 0 1]
- формирование матриц  $\tilde{A}, \tilde{C}$ ;
Q=[C;C*A;C*A^2]
Q_=[C_;C_*A_;C_*A_^2]
- вычисление матриц наблюдаемости;
T=inv(Q_)*Q;
B_ =T*B
- вычисление матрицы преобразования  $T$  и матрицы  $\tilde{B}$ ;
bet1=sqrt(2)*Om
bet2=Om^2
- определение значений  $\beta_1, \beta_2$ 
P=[1 0 -bet2; 0 1 -bet1; 0 0 1]
- формирование матрицы  $P$ ;
Atil=P*A_*inv(P);
Btil=P*B_;
Abar=Atil(1:2,1:2)
- вычисление матриц  $\tilde{A}, \tilde{A}$ ;
abar=Atil(1:2,3); bbar=Btil(1:2,1)
- формирование матриц  $\tilde{a}, \tilde{b}$ ;
Tbk=inv(T)*inv(P)
- вычисление матрицы  $T_b$ 
jx=54.3; om=0.5
- ввод числовых значений  $J_x, \Omega_0$ ;
Tb=double(subs(Tbk,[Jx Om],[jx om]))
Ao=double(subs(A,Jx,jx))
Bo=double(subs(B,Jx,jx));
Co=C
- подстановка числовых значений и перевод символьных
матриц в числовые;
Af=sym([A zeros(3,2); abar*C Abar])
Bf=sym([B; bbar])

```

```

Cf=Tbk*[0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1;C 0 0 ];
Df=zeros(3,1);
– формирование в символьной форме матриц уравнений со-
стояния единой системы объект-модель-среда-наблюдатель;
af=double(subs(Af,[Jx Om],[jx om]))
bf=double(subs(Bf,[Jx Om],[jx om]))
cf=double(subs(Cf,[Jx Om],[jx om]));
df=Df;
– перевод матриц из символьной в числовую форму;
stl=ss(af,bf,cf,df);
– формирование системы, заданной в форме уравнений со-
стояния (см. [82]);
t=0:0.1:30;
u=zeros(size(t));
x0=[0 0.25 5e-3 0 0]’;
– задание интервала и шага моделирования, входного воз-
действия и начальных условий;
[y,ti,x]=lsim(stl,u,t,x0);
plot(ti,x(:,2),ti,y(:,2)),grid,title(’M(t)’)
figure
plot(ti,x(:,3),ti,y(:,3)),grid,title(’V(t)’)
– моделирование системы и вывод графиков процессов.

```

Результаты моделирования показаны штрих-пунктирной линией на рис. 8.3

Выше рассмотрена процедура синтеза наблюдателей, основанная на задании требований к динамике процесса оценивания. Часто при синтезе следует также учитывать влияние неизмеряемых внешних возмущений на точность получаемых оценок. Синтез наблюдателей полного порядка, при котором достигается минимизация дисперсии ошибки оценивания при случайных внешних воздействиях (оптимальных фильтров Калмана–Бьюси), рассмотрен, например, в [8, 47, 88].

## 8.5. Задачи и упражнения

1. Пусть на ИСЗ действует возмущение, имеющее кроме линейной, гармоническую составляющую с некоторой частотой  $\Omega_f$  и амплитудой  $M_f$ :  $M(t) = M_0 + Vt + M_f \sin \Omega_f t$ . Кроме того, пусть присутствует аддитивная погрешность измерений  $v(t)$ , которую также считаем гармонической с частотой  $\Omega_v$

и амплитудой  $v_0$ . Другими словами, т.е. измеряемый выход объекта  $y(t) = \omega_x(t) + v_0 \sin \Omega_f t$ . Найти амплитуды составляющих ошибки оценивания  $\varepsilon_M(t) \triangleq M(t) - \hat{M}(t)$  (в установившемся режиме) по возмущениям и шумам измерений

- а) для  $n$ -мерного наблюдателя Калмана (8.20);
- б) для наблюдателя Луенбергера (8.21), (8.22).

Сравнить полученные результаты при одинаковых значениях параметра  $\Omega_0$ .

2. На с. 42 приведена линеаризованная модель углового продольного движения самолета. Предполагая, что измеряется только угол тангажа  $\vartheta(t)$ , синтезировать наблюдатель полного порядка и наблюдатель Луенбергера для оценивания остальных переменных состояния  $(\omega_z(t), \alpha(t))$ .

3. Для системы, заданной матрицами [3]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

построить наблюдатель первого порядка.

4. Для системы, заданной матрицами [3]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

построить наблюдатель с собственными значениями  $s_1 = s_2 = s_3 = -1$ .

5. Пусть  $\mathcal{S}_1$  – линейная система с постоянными параметрами, входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$  [174]). Система  $\mathcal{S}_2$  является наблюдателем состояния для системы  $\mathcal{S}_1$ , подключенным к  $\mathcal{S}_1$  надлежащим образом.

Показать, что объединенная система  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$  неуправляема по входу  $u(t)$ .

## 9. СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ И ТЕРМИНАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

### 9.1. Задача модального управления

Характер переходных процессов в системе определяется расположением корней  $s_i$  ее характеристического многочлена.<sup>1</sup> Действительно, решение  $y(t)$  однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка имеет вид  $y(t) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(t)$ , где постоянные  $C_i$  определяются начальными условиями, а составляющие  $y_i(t)$  ("моды") имеют вид  $y_i(t) = e^{s_i t}$  - при простых  $s_i$  или  $y_i(t) = P_i(t)e^{s_i t}$  - при кратных корнях (здесь  $P_i(t)$  - многочлены, степени которых определяются кратностью корня). Поэтому обеспечение "хороших" переходных процессов в системе может быть достигнуто если характеристический многочлен имеет заданные корни. Это непосредственно приводит к условию получения заданных коэффициентов характеристического многочлена замкнутой системы. Регуляторы, построенные исходя из указанного требования, называются *модальными регуляторами*.

### 9.2. Модальное управление по состоянию объекта

Рассмотрим вначале решение этой задачи при полном измерении вектора состояния объекта. Для простоты изложения будем также предполагать, что управление скалярное,  $u(t) \in \mathcal{R}$ .

Пусть динамика объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (9.1)$$

Вектор состояния  $x(t)$  объекта (9.1) считаем доступным измерению. Рассмотрим закон управления вида

$$u(t) = -Kx(t), \quad (9.2)$$

где  $K$  - подлежащая определению  $n \times l$ -матрица коэффициентов регулятора (в нашем случае  $m = 1$ ). Замкнутая система объект-регулятор описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (9.3)$$

---

<sup>1</sup> Здесь рассматриваются стационарные системы.

Ставится задача определения коэффициентов регулятора (элементов матрицы  $K$ ) таких, что характеристический многочлен  $\det(s\mathbf{I}_n - A + BK) \stackrel{\Delta}{=} D(s) = s^n + d_1s^{n-1} + \dots + d_{n-1}s + d_n$  имел заданные коэффициенты  $d_i$ . Принципиальная возможность решения этой задачи для полностью управляемых объектов следует из указанного в 7.2. свойства 4.<sup>2</sup>

Рассмотрим процедуру синтеза более подробно.

Предположим вначале, что уравнения (9.1) соответствуют управляемому каноническому представлению, т.е. матрицы  $A$ ,  $B$  имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9.4)$$

$\det(s\mathbf{I}_n - A) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ . При использовании регулятора (9.2) с матрицей  $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ , как легко убедиться непосредственной подстановкой, матрица  $A - BK$  замкнутой системы (9.3) также имеет вид матрицы Фробениуса и ее характеристический многочлен  $\det(s\mathbf{I}_n - A + BK) = s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_2)s + a_n + k_1$ . Приравнявая коэффициенты этого многочлена заданным значениям  $d_i$ , сразу получаем выражения для параметров регулятора:

$$\begin{cases} k_1 & = & d_n - a_n, \\ k_2 & = & d_{n-1} - a_{n-1}, \\ & \dots & \\ k_{n-1} & = & d_2 - a_2, \\ k_n & = & d_1 - a_1. \end{cases} \quad (9.5)$$

Пусть теперь уравнения состояния системы записаны в произвольном, а не в каноническом базисе. По-прежнему предполагаем полную управляемость объекта (9.1). В этом случае, согласно свойству 8 управляемых систем (см. п. 7.2.), имеется матрица  $T$  преобразования подобия, приводящая уравнения состояния к указанному каноническому виду.<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Оттуда же следует, что если объект не обладает полной управляемостью, получить любые заданные коэффициенты многочлена  $D(s)$  в принципе невозможно.

<sup>3</sup> Формула для вычисления матрицы  $T$  через матрицы управляемости приведена там же.

Следовательно, полагаем, что матрицы  $\tilde{A} = TAT^1$ ,  $\tilde{B} = TB$  имеют вид (9.4), причем  $\det(s\mathbf{I}_n - A) \equiv \det(s\mathbf{I}_n - \tilde{A})$ . Найдем для системы  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  коэффициенты модального регулятора  $\tilde{K}$  по формуле (9.5). После этого выполним переход к исходному базису. Для этого заметим, что поскольку  $\tilde{x}(t) = Tx(t)$ , то  $u(t) = -\tilde{K}\tilde{x}(t) = -\tilde{K}Tx(t) = -Kx(t)$ , если

$$K = \tilde{K}T. \quad (9.6)$$

Таким образом, для полностью управляемой системы со скалярным управлением получен алгоритм решения задачи модального управления. Этот алгоритм включает:

- вычисление коэффициентов характеристического многочлена системы;
- вычисление матрицы преобразования к канонической форме (если исходные уравнения имеют неканонический вид);
- вычисление коэффициентов регулятора по формулам (9.5), (9.6).

Вместе с тем здесь содержится доказательство того, что для полностью управляемых систем (со скалярным управлением) свойство 4 выводится из свойства 11. Отметим также, что в силу дуальности задач управления и оценивания изложенный здесь метод применим и в рассмотренной в п. 8.2 задаче синтеза наблюдателя состояния. Более подробные сведения по этому вопросу приведены в [3].

Определение значений желаемых полюсов замкнутой системы является самостоятельной задачей, решение которой связано с предъявляемыми к системе требованиями.

Изложенные в настоящем параграфе результаты непосредственно переносятся на решение задачи модального управления для дискретных систем. Для стационарных дискретных систем имеется возможность получить конечное время переходного процесса. Это обеспечивается выбором характеристического многочлена замкнутой дискретной системы с нулевыми коэффициентами, что дает время переходного процесса, не превышающее  $n$  шагов дискретности.

### 9.3. Модальное управление по выходу объекта. Теорема разделения

Рассмотрим теперь более характерную для практики задачу, когда измерению доступен не вектор состояния  $x(t)$ , а выход

объекта  $y(t)$ . Объект будем считать невырожденным (полностью управляемым и наблюдаемым). В этом случае представляется естественным использовать в законе управления не сами переменные состояния объекта  $x(t)$ , а их оценки  $\hat{x}(t)$ , полученные с помощью наблюдателя (рис. 9.1). Уравнения замкнутой системы тогда принимают вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (9.7)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t), \quad (9.8)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0. \quad (9.9)$$

Уравнения (9.8), (9.9) описывают регулятор, входом которого является процесс  $y(t)$ , выходом – управляющее воздействие  $u(t)$ . В отличие от регулятора (9.2) данный регулятор явля-

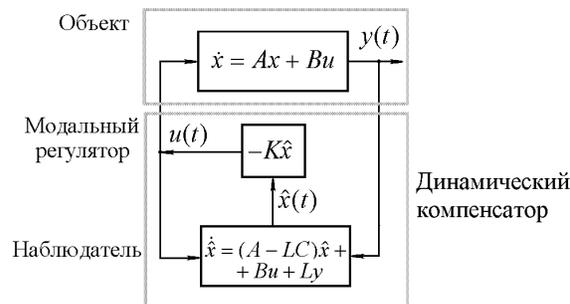


Рис. 9.1. Система стабилизации с динамическим компенсатором.

ется динамической системой, порядок которой совпадает с порядком уравнений объекта управления (9.7). Регуляторы такого вида называются иногда *динамическими компенсаторами* [76].<sup>4</sup>

Возникает вопрос: каковы динамические свойства системы (9.7)–(9.9), как влияет на свойства системы замена в модальном регуляторе значений состояния на его оценки? Для ответа на него найдем характеристический многочлен замкнутой системы.

<sup>4</sup> Использование наблюдателей Луенбергера позволяет уменьшить порядок уравнений компенсатора на величину  $p = \text{rank } C$ .

Упростить вычисление данного многочлена можно преобразованием уравнений состояния. Для этого снова используем ошибку оценивания  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Тогда можем записать  $\hat{x}(t) = x(t) - \varepsilon(t)$ , и уравнения (9.7) – (9.9) преобразуются к виду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (9.10)$$

$$u(t) = -Kx(t) + K\varepsilon(t), \quad (9.11)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - LC)\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t_0) = x_0 - \hat{x}_0. \quad (9.12)$$

Переход от уравнений (9.7)–(9.9) к (9.10)–(9.12) соответствует преобразованию вектора состояния системы (9.7)–(9.9)  $\tilde{x}(t) \triangleq \text{col}\{x(t), \hat{x}(t)\}$  к вектору  $\bar{x}(t) \triangleq \text{col}\{x(t), x(t) - \hat{x}(t)\} = \text{col}\{x(t), \varepsilon(t)\}$ , которое, конечно, является невырожденным. Относительно вектора  $\bar{x}(t)$  получим однородную систему  $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t)$ , где матрица  $\bar{A}$  имеет следующую блочную структуру:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ \mathbf{0} & A - LC \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица  $\bar{A}$  имеет блочную треугольную форму, ее характеристический многочлен равен произведению характеристических многочленов диагональных блоков

$$\det(s\mathbf{I}_n - \bar{A}) = \det(s\mathbf{I}_n - A + BK) \cdot \det(s\mathbf{I}_n - A + LC).$$

Ввиду того что система (9.10)–(9.12) получена невырожденным преобразованием уравнений (9.7)–(9.9), исходная замкнутая система (9.7)–(9.9) имеет такой же характеристический многочлен. Следовательно, справедлива следующая теорема.

**Теорема разделения [3, 47].** Характеристический многочлен замкнутой системы с регулятором, использующим оценки состояния объекта, и наблюдателем равен произведению характеристического многочлена системы с "идеальным" модальным регулятором (9.2) и характеристического многочлена (8.5) наблюдателя (9.9).

Корни характеристического многочлена системы (9.7)–(9.9) получаются объединением корней системы с модальным регулятором и собственных чисел наблюдателя состояния. Таким образом, задачи синтеза модального регулятора (определения матрицы  $K$ ) и наблюдателя (вычисления матрицы  $L$ ) могут решаться независимо.  $\square$

Заметим, что аналогичная теорема справедлива и при использовании наблюдателей пониженного порядка, описанных в п. 8.3. [3].

Уравнения (9.10)–(9.12) позволяют также сделать вывод, что при отсутствии внешних воздействий процессы в системе (9.7) – (9.9) будут асимптотически приближаться к процессам в системе с модальным регулятором по состоянию (9.2), как если бы система (9.3) была подвержена действию затухающих возмущений. Роль этих возмущений играет составляющая  $K\varepsilon(t)$  в уравнении (9.11). Скорость затухания ошибки  $\varepsilon(t)$  определяется при синтезе наблюдателя. Практически рекомендуется выбирать время переходного процесса наблюдателя  $t_n$  в несколько раз меньшим требуемого времени переходного процесса в системе с модальным регулятором.

Нетрудно убедиться, что для SISO-систем ( $l = m = 1$ ) уравнения (9.8), (9.9) приводятся к передаточной функции динамического регулятора в цепи обратной связи.<sup>5</sup> Поэтому изложенный метод синтеза можно рассматривать как подход к определению параметров корректирующего звена, обеспечивающего заданное расположение корней характеристического многочлена замкнутой системы. Решение этой задачи на основе операций с многочленами приведено, например, в [76]. Следует также отметить, что и в том, и в другом случае требуется невырожденность объекта управления. Если в передаточной функции разомкнутой системы имеются совпадающие нули и полюса, то их значения неизбежно будут содержаться среди корней характеристического многочлена замкнутой системы  $D(s)$ . Действительно,  $D(s) = A(s) + B(s)$ , где  $A(s)$ ,  $B(s)$  – знаменатель и числитель передаточной функции разомкнутой системы. Пусть  $A(s) = A'(s)R(s)$ ,  $B(s) = B'(s)R(s)$ , т.е. имеются общие нули и полюса. Тогда  $D(s) = R(s)(A'(s) + B'(s))$  и среди корней многочлена  $D(s)$  при любых  $A'(s)$ ,  $B'(s)$  содержатся корни  $R(s)$ . Устойчивость замкнутой системы может быть обеспечена только в том случае, когда они имеют отрицательные вещественные части, что соответствует стабилизируемости и обнаруживаемости объекта управления.

---

<sup>5</sup> Это положение иллюстрируется рассмотренным в 9.5.1. примером.

#### 9.4. Терминальное управление

Как отмечено при определении понятия управляемости (с. 167, п. 7.1.), полностью управляемую стационарную систему можно (теоретически) перевести из любого начального состояния в любое другое за произвольно заданный конечный промежуток времени. Рассмотренное выше модальное управление обеспечивает лишь асимптотическую стабилизацию системы, т.е. – приведение из любого исходного состояния в нулевое при  $t \rightarrow \infty$ . Во многих приложениях требуется именно решение задачи попадания в заданное состояние к назначенному моменту времени. Такие задачи называются задачами *терминального*, или *финитного*, управления [3, 20]. Они возникают, например, при выведении ракет-носителей, сближении и посадке космических аппаратов [19, 20], выполнении типовых маневров самолетов [23], при управлении манипуляционными роботами и транспортными средствами.<sup>6</sup> Решение этой задачи для стационарных систем фактически дано при доказательстве положительной определенности грамиана управляемости в п. 7.2. (п. 10, с. 172). Там показано, что для приведения стационарного, полностью управляемого объекта  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  из начального состояния  $x_0$  в заданное состояние  $x_1$  за указанный временной интервал  $\theta = t_1 - t_0 > 0$  можно использовать программное управление [3, 30, 83].

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} \mathcal{W}(\theta)^{-1} (x_1 - e^{A\theta} x_0), \quad (9.13)$$

где грамиан управляемости

$$\mathcal{W}(\theta) = \int_0^\theta e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau. \quad (9.14)$$

Таким образом, найдено управление не в форме обратной связи по состоянию (или другой текущей информации о поведении объекта), а в виде функции времени, которая должна быть рассчитана заранее, исходя из заданных значений  $x_0, x_1, \theta$ .

---

<sup>6</sup> Стоит заметить, что под термином "терминальное управление" обычно подразумевается управление, минимизирующее функционал, который зависит от значения управляемого процесса в конце рассматриваемого интервала. В отличие от термина "финитное управление" здесь не обязательно подразумевается требование приведения состояния системы в конкретную точку [2, 3, 23, 93].

Управление (9.13) для решения данной задачи не является единственным [3]. Оно определяется с точностью до некоторой аддитивно добавляемой функции  $r(t)$ , удовлетворяющей условию  $\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B r(\tau) d\tau = 0$ . Действительно, данный интеграл (по формуле Коши (6.9), с. 130) выражает реакцию системы на воздействие  $r(t)$ . При равенстве его нулю реакции на  $u(t)$  и  $u(t) + r(t)$  совпадают. Как показано в [3], управление  $u(t)$  (9.13) из всех воздействий, переводящих  $x_0$  в  $x_1$ , обладает *минимальной нормой* (т.е. минимизирует интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} u(t)^T u(t) dt$ ).

Перечислим некоторые свойства функции  $\mathcal{W}(t_0, t_1)$  [3, 47]:

$$\mathcal{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B(t)^T \Phi(t_0, t)^T dt.$$

Это  $n \times n$  матричная функция, которая

- 1) симметрична –  $\mathcal{W}(t_0, t_1) = \mathcal{W}(t_0, t_1)^T$ ;
- 2) неотрицательно определена для всех  $t_0, t_1 \geq t_0$ ;
- 3) удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению (*уравнению Ляпунова*)<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}(t, t_1) &= A(t)\mathcal{W}(t, t_1) + \mathcal{W}(t, t_1)A(t)^T - B(t)B(t)^T, \\ \mathcal{W}(t_1, t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

В частности, для стационарных систем при  $\theta \rightarrow \infty$  матрица  $\mathcal{W}(\theta)$  приближается к решению  $\mathcal{W}$  алгебраического уравнения Ляпунова

$$A\mathcal{W} + \mathcal{W}A^T - BB^T = 0;$$

- 4) удовлетворяет функциональному уравнению

$$\mathcal{W}(t_0, t_1) = \mathcal{W}(t_0, t) + \Phi(t_0, t)\mathcal{W}(t, t_1)\Phi(t_0, t)^T.$$

При вычислении грамиана управляемости (9.14) можно также учесть следующие соотношения. Введем функцию

---

<sup>7</sup> Более подробно дифференциальное и алгебраическое уравнения Ляпунова рассматриваются в п. 11.4.4. на с. 274 в связи с исследованием устойчивости.

$w(t) \triangleq e^{At}B$ . Как показано в 6.2. (с. 132), при скалярном входном воздействии ( $m = 1$ ) можно трактовать  $w(t)$ , как функцию веса рассматриваемой системы и находить, решая однородное уравнение  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  при  $x(0) = B$ . Если  $m > 1$ , то в качестве начальных условий берутся столбцы  $b_i$  матрицы  $B = [b_1 \dot{b}_2 \dot{\dots} \dot{b}_m]$  и  $w(t)$  находится объединением  $m$  решений.

Эти свойства можно использовать при решении задач конечного и терминального управления.

Полученное выше решение задает программное управление. Представляет интерес получить управление в форме обратной связи, как это обычно принято в системах автоматического управления. Покажем, как это сделать при решении задачи стабилизации, – когда требуется привести состояние объекта в начало координат,  $x_1 = 0$ .

Обратимся к формуле (9.13). Обозначив  $C \triangleq \mathcal{W}(\theta)^{-1}(x_1 - e^{A\theta}x_0)$ ,  $C \in \mathcal{R}$ , получим

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}C = B^T e^{-A^T(t-t_0)}e^{A^T\theta}, \quad \theta = t_1 - t_0.$$

Введем сопряженное уравнение <sup>8</sup>

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), \quad \psi(t_0) = e^{A\theta}C. \quad (9.16)$$

Согласно формуле Коши, его решение  $\psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\psi(t_0) = e^{A^T(t_1-t)}C$ . Сравнивая полученное выражение для  $\psi(t)$  с формулой для  $u(t)$ , видим, что управляющее воздействие можно выразить как  $u(t) = B^T \psi(t)$ , где  $\psi(t)$  удовлетворяет уравнению (9.16),  $\psi(t_0) = e^{A^T\theta}C$ . Объединяя уравнения объекта, закон управления и сопряженное уравнение, получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0, \\ u(t) = B^T \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), & \psi(t_0) = e^{A^T\theta}C. \end{cases} \quad (9.17)$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BB^T \psi(t), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), & \psi(t_0) = e^{A^T\theta}C. \end{cases} \quad (9.18)$$

---

<sup>8</sup> Линейное однородное дифференциальное уравнение для  $\psi(t)$  называется *сопряженным* уравнению относительно  $x(t)$ , если для любых начальных условий скалярное произведение  $x(t)^T \psi(t) = \text{const}$ . Нетрудно убедиться, что уравнения  $\dot{x} = Ax$  и  $\dot{\psi} = -A^T \psi$  являются сопряженными [3].

Для решения этой системы можно использовать *преобразование Риккати* [3, 47, 88]. Будем искать  $\psi(t)$  в виде  $\psi(t) = S(t)x(t)$ , где  $S(t)$  – подлежащая определению матрица-функция. Подстановкой  $\psi(t)$  во второе уравнение и путем дифференцирования получаем  $\dot{S}x + S\dot{x} = -A^T Sx$ . Учитывая первое уравнение системы, после подстановок получаем  $\dot{S}x + SAx + SB B^T Sx = -A^T Sx$ . Чтобы полученное равенство было выполнено при всех  $x$ ,  $S(t)$  должна удовлетворять следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$\dot{S}(t) + S(t)A + A^T S(t) + S(t)BB^T S(t) = 0. \quad (9.19)$$

Чтобы найти начальное значение  $S(t_0)$ , учтем, что рассматривается задача стабилизации и  $x_1 = 0$ . Поэтому

$$C = -\mathcal{W}(\theta)^{-1} e^{A\theta} x_0, \quad \psi(t_0) = -e^{A^T \theta} \mathcal{W}(\theta)^{-1} e^{A\theta} x_0. \quad (9.20)$$

Так как должно выполняться условие  $\psi(t_0) = S(t_0)x(t_0)$ , то получим  $S(t_0) = -e^{A^T \theta} \mathcal{W}(\theta)^{-1} e^{A\theta}$ . Таким образом, управление, переводящее состояние объекта из  $x(t_0) = x_0$  в нулевое за заданное время  $\theta > 0$ , выражается в виде обратной связи

$$u(t) = B^T S(t)x(t), \quad (9.21)$$

где  $S(t)$  удовлетворяет уравнению (9.19). Данное уравнение является частным случаем так называемого *уравнения Риккати*, которое часто встречается при решении различных оптимизационных задач [2, 3, 23, 93, 47]. В Приложении С. на с. 423 приведено обращение к MATLAB-программе для вычисления установившегося решения этого уравнения.

## 9.5. Примеры систем модального и терминального управления

### 9.5.1. Стабилизация углового движения ИСЗ с компенсацией возмущений

Рассмотрим задачу стабилизации ИСЗ (8.17), с. 194 (см. также 1.4.2.). Пусть требуется обеспечить движение без вращения по крену. *Пропорциональный закон* стабилизации угловой скорости имеет вид

$$u(t) = -k_\omega \omega_x(t). \quad (9.22)$$

Рассмотрим также *комбинированный закон* стабилизации, при котором в сигнал управления (в данном случае – в управляющий момент) вводится также компенсирующее воздействие по возмущению. Так как возмущающий момент непосредственно измерен быть не может, используем его оценку  $\hat{M}(t)$ , полученную наблюдателем (8.20). Тогда комбинированный закон управления принимает вид<sup>9</sup>

$$u(t) = -k_\omega \omega_x(t) - k_m \hat{M}(t). \quad (9.23)$$

Выбор коэффициента  $k_\omega$  выполним исходя из условия быстрогодействия процесса стабилизации в замкнутом контуре. Соответствующий этому контуру характеристический многочлен имеет вид  $D(s) = s + \frac{k_\omega}{J_x}$ , откуда  $k_\omega = -J_x s_1$ , где  $s_1$  – заданное значение корня  $D(s)$ . Очевидно, что для данной системы коэффициент передачи по возмущению  $k_m = 1$ . Результаты моделирования системы стабилизации при указанных на с. 195 параметрах и  $s_1 = 0.2 \text{ с}^{-1}$  приведены на рис. 9.2. Как видно

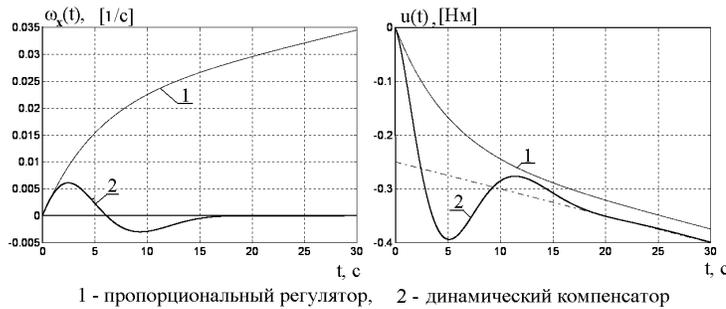


Рис. 9.2. Процессы стабилизации ИСЗ.

из рисунка, при пропорциональном законе управления устанавливается равноускоренное вращательное движение. Использование комбинированного закона управления с оценкой и компенсацией возмущения в данных условиях приводит к асимптотическому стремлению скорости к нулю. Пунктирной линией на графике  $u(t)$  показана "идеальная" компенсирующая составляющая в управляющем воздействии, равная

<sup>9</sup> Следует учитывать, что поскольку сигнал  $\hat{M}(t)$  вырабатывается наблюдателем, то регулятор (динамический компенсатор) задается уравнениями (8.20), (9.23).

$-M(t)$ . На рис. 9.3 приведена диаграмма Боде (ЛАХ) для системы стабилизации (8.17), (8.20), (9.23).

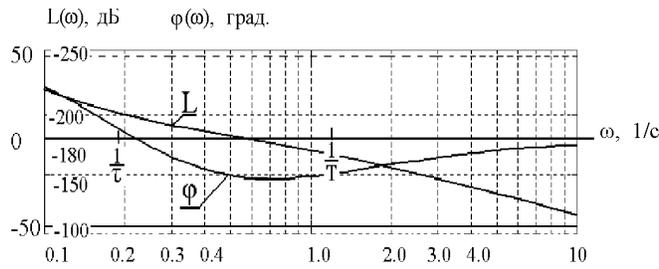


Рис. 9.3. Диаграммы Боде системы стабилизации ИСЗ с регулятором (8.20), (9.23).

Графики показывают наличие достаточных запасов устойчивости системы (запас устойчивости по усилению  $L_a = 12$  дБ, запас устойчивости по фазе  $\mu_\varphi = 33^\circ$ ). Вычисляя передаточную функцию компенсатора (8.20), (9.23) от входа  $\omega_x$  к управлению  $u$  при указанных значениях параметров получим, что рассмотренный закон управления можно реализовать звеном  $W(s) = k \frac{\tau s^2 + 2\xi\tau s + 1}{s^2(Ts + 1)}$ , где  $k = 1.13 \text{ с}^{-2}$ ,  $T = 0.83 \text{ с}$ ,  $\tau = 5.3 \text{ с}$ . Для выполнения вычислений использован следующий фрагмент программы (начало программы приведено на с. 196)

```

Km=1; Cc=[Kw Km 0];
Ac=A_-B*Cc; Bc=L;
– формирование матриц уравнений состояния;
[num,den]=ss2tf(Ac,Bc,[Kw Km 0],0,1);
– вычисление передаточной функции компенсатора;
nf=num/J; df=conv([1,0],den)
– вычисление передаточной функции разомкнутой системы;
om=logspace(-1,1);
[mag,ph]=bode(nf,df,om);
– расчет частотных характеристик.

```

### 9.5.2. Возбуждение колебаний в цепочке осцилляторов

Рассмотрим систему, состоящую из последовательности осцилляторов (например, маятников), соединенных упругими связями. Такая модель используется для описания различных физических и механических систем [52, 162]. В отсутствие сил трения и при линейных упругих деформациях связей (в области действия закона Гука) цепочка  $N$  маятников описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1(t) + \omega^2 \sin \varphi_1(t) = k(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + u(t), \\ \dots \\ \ddot{\varphi}_i(t) + \omega^2 \sin \varphi_i(t) = k(\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i+1}(t)), \\ \dots \\ \ddot{\varphi}_N(t) + \omega^2 \sin \varphi_N(t) = k(\varphi_{N-1}(t) - \varphi_N(t)), \end{cases} \quad (9.24)$$

где  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) – углы поворота маятников;  $u(t)$  – внешнее управляющее воздействие, пропорциональное моменту, приложенному к первому маятнику;  $\omega, k$  – параметры системы ( $\omega$  – собственная частота малых колебаний маятников,  $k$  – коэффициент жесткости пружин).

Далее будем использовать линеаризованную модель, предполагая, что амплитуда колебаний маятников незначительна. Такая модель имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1(t) + \omega^2 \varphi_1(t) = k(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + u(t), \\ \dots \\ \ddot{\varphi}_i(t) + \omega^2 \varphi_i(t) = k(\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i+1}(t)), \\ \dots \\ \ddot{\varphi}_N(t) + \omega^2 \varphi_N(t) = k(\varphi_{N-1}(t) - \varphi_N(t)). \end{cases} \quad (9.25)$$

Введем вектор состояния  $x(t) \in \mathcal{R}^{2N}$   $x(t) \triangleq \text{col}\{\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \dots, \varphi_N, \dot{\varphi}_N\}$ . В стандартной форме уравнений состояния  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  модель (9.25) задается матрицами

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{12} & A_2 & A_{12} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{12} & A_2 & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_2 & A_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{12} & A_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - k & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - 2k & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $B_1 = [0 \ 1]^T$ .

Рассмотрим задачу возбуждения "волны" колебаний заданной амплитуды, при которых соседние маятники находятся в противофазе. При этом ограничимся требованием приведения их в это состояние за заданное время из любого начального состояния. Для ее решения воспользуемся изложенным в п. 9.4. методом. Управление будем искать в виде программной функции времени (9.13).

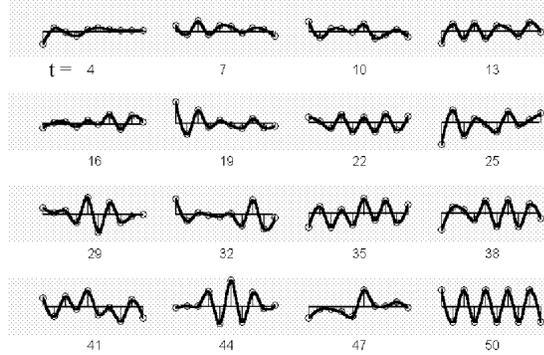


Рис. 9.4. Волна колебаний.

Результаты решения задачи для  $N = 10$ ,  $k = 5 \text{ с}^{-2}$ ,  $\omega = 0.4\pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_i(0) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $\theta = 50 \text{ с}$ ,  $\varphi_i(\theta) = (-1)^{i+1} \cdot 30$  град.,  $\dot{\varphi}_i(\theta) = 0$  показаны на рис. 9.4, 9.5. На первом изображены последовательности положений маятников в разные моменты времени (отмечены цифрой внизу). На втором 9.5 показаны графики углов поворота  $\varphi_9(t)$ ,  $\varphi_{10}(t)$  и управляющее воздействие  $u(t)$  на промежутке  $t \in [30, 50] \text{ с}$ . Заметим, что в данном примере (как и в общем случае) приведение системы в заданное состояние не означает, вообще говоря, что она останется в этом состоянии и дальше или будет совершать предписанное движение. Если из полученного состояния  $x(\theta)$  построить управление, переводящее систему в это же состояние к моменту  $t = \theta + \Delta$ , ( $\Delta > 0$ ), то получим колебания сложной формы, симметричные относительно середины интервала  $[\theta, \theta + \Delta]$ .

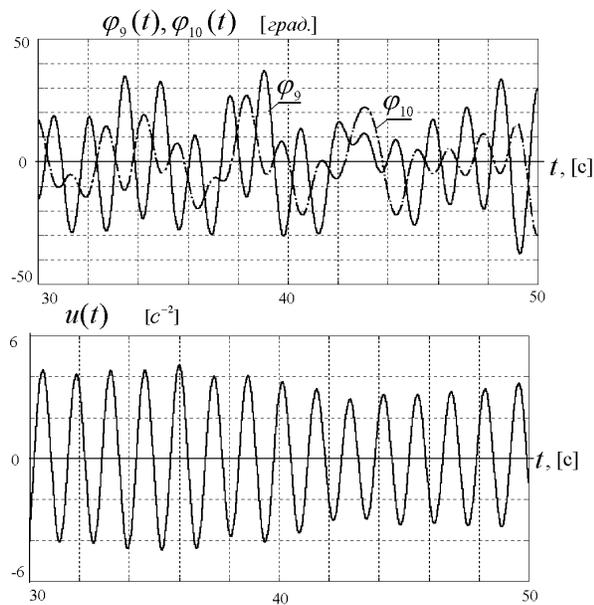


Рис. 9.5. Углы поворота маятников и управление.

Для вычислений используем следующую программу.

MATLAB-программа моделирования процесса возбуждения волны колебаний

```

k=5; om2=(0.2*2*pi)^2; N=10;
- ввод параметров  $k, \omega$  и числа маятников  $N$ ;
x0=zeros(2*N,1); x1=zeros(2*N,1);
- обнуление массивов начального и конечного состояний
t0=0; t1=50;
- ввод  $t_0, t_1$ ;
xmax=30/57.3;
- ввод амплитуды колебаний;
A=zeros(2*N);
- ввод нулевых элементов матрицы  $A$ ;
B=zeros(2*N,1); B(2)=1;
- формирование матрицы  $B$ ;
A1=[0 1; -om2 0];

```

```

- формирование матрицы  $A_1$ ;
sig=1;
for in=1:N
- начало цикла формирования матрицы  $A$  и вектора  $x_1$ ;
x1(2*(in-1)+1)=xmax*sig;
sig=-sig;
- формирование последовательности  $(-1)^i$ ;
  for in1=1:N
    l=2*(in1-1)+1;
    A(l:l+1,l:l+1)=A1;
    A(l+1,l)=A(l+1,l)-k;
    if ((in1>1)&(in1<N))
      A(l+1,l)=A(l+1,l)-k;
    end
    if in1<N
      A(l+1,l+2)=k;
      A(l+3,l)=k;
    end
  end
end
- конец цикла формирования матрицы  $A$  и  $x_1$ ;
C=eye(2*N,2*N); D=zeros(2*N,1);
- формирование матриц  $C = I_2$  и  $D = \mathbf{0}$  для моделирования
по lsim (см. Приложение С. с. 431);
Th=t1-t0;
- вычисление  $\theta = t_1 - t_0$ ;
t=0:Th/1000:Th;
Nt=length(t);
w0=B; u=zeros(size(t));
- формирование начальных условий  $w(0) = B$  и входного
воздействия  $u(t) \equiv 0$  для вычисления функции веса  $w(t)$ ;
w=lsim(A,B,C,D,u,t,w0);
- вычисление  $w(t)$ ;
W=zeros(size(A));
- начальное обнуление массива для грамиана  $\mathcal{W}(\theta)$ ;
for k=1:Nt
W=W+w(k,:)'*w(k,:);
end
W=W*Th/Nt
- вычисление  $\mathcal{W}(\theta)$  методом Эйлера;

```

```

c=inv(W)*(x1-expm(A*Th)*x0);
– вычисление  $C$  по формуле (9.20);
for k=1:Nt;
u(k)=B'*expm(A*(t1-t(k)))*c;
end

```

– цикл формирования программного управления по формуле (9.13);

```

[y,ti,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);

```

– моделирование системы (вывод графиков выполняется стандартным образом).

## 9.6. Задачи и упражнения

1. Доказать справедливость теоремы разделения для динамических компенсаторов, использующих наблюдатель Луненберга.

2. Для рассмотренной в примере на с. 194 задачи идентификации возмущений, действующих на ИСЗ, получить алгоритм дискретного наблюдателя полного порядка, имеющего постоянные параметры и интервал квантования  $T_0$ , который оценивает возмущение за наименьшее число шагов дискретности. Использовать полученные оценки при синтезе дискретной астатической системы стабилизации, обеспечивающей наименьшее время переходного процесса.

3. Получить [3] уравнения наблюдателя первого порядка для объекта, модель которого задана матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Получить уравнения наблюдателя полного порядка для цепочки маятников 9.25, с. 214, предполагая, что измеряется только отклонение  $i$ -го маятника ( $1 \leq i \leq N$ ).

5. Для системы [3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

получить уравнения динамического компенсатора первого порядка, обеспечивающего характеристические числа замкнутой системы, равные  $s_1 = -3$ ,  $s_{2,3} = -2 \pm j$ .

6. Для объекта второго порядка  $\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$ ,  $y(t) = x(t) + \Delta$ , где  $\Delta$  – постоянное неизменяемое возмущение [3], построить регулятор, обеспечивающий при любых  $\Delta$  выполнение условий  $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ ,  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Определить наименьший порядок регулятора.

7. Для задачи 6 рассмотреть [3] гармоническое возмущение  $\Delta(t) = \Delta_0 \sin \omega t$  с известной частотой  $\omega$ .

## 10. УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 10.1. Общие сведения о нелинейных системах

В предыдущих главах изучались линейные системы. Рассмотрим подробнее значение этого термина. Упрощенно можно считать, что линейные системы – это такие системы, для которых справедлив *принцип суперпозиции* – реакция системы на линейную комбинацию (*суперпозицию*) воздействий совпадает с такой же линейной комбинацией реакций на каждое воздействие в отдельности.<sup>1</sup> Из этого общего принципа следует, например, что линейное статическое звено должно описываться линейной (пропорциональной) зависимостью  $y = Ku$  между входом  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  и выходом  $y(t) \in \mathcal{R}^l$ , где  $K$  –  $l \times m$ -матрица, зависящая от  $t$  в нестационарном случае. Если рассматривается динамическая система непрерывного времени, то в линейном конечномерном случае она описывается линейными дифференциальными уравнениями, дискретная система – линейными разностными уравнениями и т.д.

Системы, для которых этот принцип не выполняется, относятся к *нелинейным*. Заметим, что данное определение носит “негативный” характер в том смысле, что оно указывает на свойство, которое у определяемых систем отсутствует. Правильнее сказать, что свойство линейности выделяет класс линейных систем из всех (вообще говоря, – нелинейных) систем. Однако и в терминологическом, и в методическом отношении удобнее считать, что линейные и нелинейные системы относятся к разным классам.

Отметим, что если в состав системы входит хотя бы одно нелинейное звено, то и вся система в целом становится нелинейной. Это дает основание иногда определять линейные системы, как системы, состоящие только из линейных звеньев. Нелинейной системой тогда называется система, содержащая хотя бы один нелинейный элемент.

---

<sup>1</sup> Такое определение линейной системы является достаточно общим. Оно применимо как к конечномерным, так и к бесконечномерным дифференциальным системам, а также к дискретным системам. Однако оно является не совсем полным, так как не отражает влияния начального состояния. Полное определение свойства линейности систем будет дано ниже, в 10.3.1.

Следует подчеркнуть, что все реальные системы являются нелинейными. Физическим звеньям свойственны явления насыщения, гистерезиса, люфта и т.д. Однако линейным системам не случайно уделено такое большое внимание в теории систем. Прежде всего, теория линейных систем достаточно проста. Можно даже считать ее практически завершенной. Теория нелинейных систем существенно сложнее, значительные усилия по исследованию нелинейных систем обычно приводят к менее детальному описанию процессов, чем в линейном случае. Нелинейные системы могут обладать такой сложностью и таким разнообразием свойств, что представляется невозможным говорить о завершении теории таких систем в обозримом будущем. Конечно, простота исследования не является сама по себе достаточным основанием для применения линейной теории. Однако очень во многих случаях использование линеаризованной модели дает практически те же результаты, что и применение более точной нелинейной модели. Следует также учесть, что при составлении модели системы неизбежно возникают ошибки, связанные, например, с погрешностью определения значений параметров объекта. Влияние этих ошибок может оказаться более существенным, чем погрешностей, вызванных линеаризацией модели. Определенным теоретическим обоснованием применимости линейной теории систем служит первый метод А.М. Ляпунова, согласно которому при "гладкой" нелинейной характеристике устойчивость нелинейной системы можно исследовать по первому (линейному) приближению [34].<sup>2</sup> Поэтому на практике обычно выполняется предварительное исследование линеаризованной модели, для которой и производится синтез закона управления. Затем осуществляется анализ полученной системы с использованием более полной, нелинейной, модели. Во многих случаях оказывается, что нелинейные свойства системы не играют существенной роли. При таком подходе целесообразно обеспечивать выпол-

---

<sup>2</sup> Напомним, что, согласно первому методу Ляпунова, если линеаризованная система асимптотически устойчива, то состояние равновесия нелинейной системы устойчиво в малом; если линеаризованная система неустойчива, то неустойчиво и состояние равновесия нелинейной системы; если линеаризованная система находится "на границе устойчивости", то нельзя исследовать устойчивость состояния равновесия по первому приближению.

нение заданных технических требований с определенным "запасом", что позволяет предотвратить нарушение требуемых показателей при влиянии неучтенных нелинейностей.

Вместе с тем имеется обширный класс систем, для которых нелинейные свойства являются принципиально важными и применение линейных моделей приводит к качественно неверным результатам. Выше уже упоминалось о ситуации, в которой устойчивость состояния равновесия не может быть исследована по линейному приближению. Более существенным является то, что для многих систем линеаризация в рабочей области значений просто невыполнима из-за негладкости (недифференцируемости) нелинейных характеристик. Это явление имеет место, когда в систему входят "разрывные" нелинейности, например релейные звенья. Кроме того, даже в тех случаях, когда линеаризация возможна и даже можно сделать вывод об устойчивости состояния равновесия, применение линейных моделей может привести к весьма существенным количественным ошибкам. Наконец, в науке и технике все чаще возникают задачи, когда исследуемые или создаваемые режимы системы являются неравновесными, например колебательными. При этом система может демонстрировать сложное (мультистабильное, хаотическое) поведение, которое принципиально не может быть описано в рамках линейной теории и требует новых подходов (см. главу 13).

Во всех перечисленных ситуациях требуется использование методов теории нелинейных систем.

Таким образом, нелинейности, свойственные реальным физическим системам, можно (со значительной степенью условности) разбить на два класса:

- *существенные нелинейности*, влиянием которых нельзя пренебречь без существенной ошибки при определении характеристик системы;
- *несущественные нелинейности*, влиянием которых пренебречь можно.<sup>3</sup>

Имеется и другой способ классификации нелинейных зве-

---

<sup>3</sup> Условность такой классификации связана с тем, что в разных ситуациях данная нелинейность может оказаться либо существенной, либо несущественной. Поэтому часто не удается определить а priori, можно ли не учитывать ее влияние. Кроме того, требуется указать количественно, какая ошибка считается "существенной".

ннев, основанный на причинах их появления в системе. С этой точки зрения нелинейности можно разбить на *естественные* и *искусственные* (*преднамеренно вводимые*).

Естественные нелинейности присутствуют в системе в силу физических свойств материалов, из которых изготовлены входящие в нее устройства, особенностей уравнений, описывающих происходящие в объекте управления процессы, и т.д. В этой связи уже упоминались насыщение, люфт, гистерезис, свойственные реальным физическим звеньям разной природы. В цифровых системах управления присутствует специфичная ступенчатая нелинейность, вызванная конечностью разрядной сетки ЭВМ и преобразователей сигналов. При синтезе закона управления эти нелинейности можно учитывать, или нет, в зависимости от их уровня, однако они считаются заданными, не изменяемыми без переработки конструкции объекта или узлов системы.

Искусственные нелинейности вводятся проектировщиком в закон управления, чтобы обеспечить требуемое (оптимальное) качество работы системы. В зависимости от требований, предъявленных к системе управления и условий ее функционирования, могут быть различные варианты введения нелинейных зависимостей в закон управления. Эти варианты образуют целые, иногда весьма обширные, направления в теории управления. Перечислим некоторые из них.

**Оптимальные по быстродействию системы управления.** Оптимальное по быстродействию управление при ограниченном уровне управляющего воздействия достигается при существенно нелинейном (релейном) законе управления, когда сигнал управления принимает крайние значения в зависимости от текущего состояния системы [2, 76, 93, 94].

**Адаптивные (самонастраивающиеся) системы управления.** Эти системы предназначены для работы в условиях значительной априорной неопределенности параметров объекта и условий среды. Недостающая информация об объекте получается автоматически в процессе работы системы на основе текущих измерений. В подавляющем большинстве случаев адаптивные системы являются существенно нелинейными [8, 76, 93, 103, 106].

**Экстремальные системы управления.** Экстремальные системы должны обеспечить в процессе работы минимальное

(или максимальное) значение некоторого функционала качества, зависящего от значений процесса в системе. В таких системах, следовательно, цель управления задана не в виде требуемого значения выхода объекта, а через функционал качества. В процессе работы должна быть обеспечена автоматическая настройка на экстремум данного функционала, положение которого может меняться в зависимости от разных условий и быть неизвестным до начала работы системы [8, 93].

**Системы с переменной структурой.** Такие системы включают в себя несколько, как правило, линейных регуляторов ("структур"), между которыми происходит переключение при формировании управляющего воздействия, причем выбор структуры выполняется на основе текущей информации о состоянии объекта (а не программно во времени). Это приводит к тому, что закон управления в целом оказывается существенно нелинейным [8, 30, 93, 102, 191].

**Системы с нелинейными корректирующими устройствами (НКУ).** При разработке нелинейных корректирующих устройств обычно ставится задача "развязать" зависимость между амплитудной и фазовой частотными характеристиками, свойственную для всех линейных звеньев. Достижение этого эффекта позволяет, например, осуществить амплитудное подавление влияния колебаний, вызванных упругими свойствами конструкций без внесения нежелательного фазового запаздывания. НКУ могут оказаться эффективными и для повышения точности систем управления [113].

Имеются и другие классы систем с преднамеренно вводимыми нелинейностями. Изучение всех возможных вариантов использования нелинейных законов управления, как и разработанных методов теории нелинейных систем, конечно же выходит за рамки этой книги, поэтому в дальнейшем кратко ознакомимся лишь с некоторыми из них. Подробнее о методах теории нелинейных систем можно прочесть в других книгах новой серии "Анализ и синтез нелинейных систем" [64, 56], а также в [2, 28, 76, 84, 71, 93, 95].

## 10.2. Уравнения нелинейных звеньев и систем

Как и для линейных систем, можно выделить статические (безынерционные) и динамические (инерционные) нелиней-

ные звенья. Напомним, что поведение статических звеньев полностью определяется их статической характеристикой, то есть зависимостью выходной величины от входной в тот же момент времени:

$$y(t) = F(u(t)), \quad \text{— для стационарных звеньев ;}$$

$$y(t) = F(u(t), t), \quad \text{— для нестационарных звеньев .}$$

Статическим описанием пользуются, когда можно пренебречь инерционностью звена для данной задачи (более подробно см. [72]).

Для конечномерных дифференциальных систем (непрерывного времени) динамические звенья можно описать уравнениями состояния

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), & \text{— уравнение состояния ,} \\ y(t) = g(x, u, t). & \text{— уравнение выхода .} \end{cases} \quad (10.1)$$

Здесь  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^l$  — векторы состояния, входа и выхода системы;  $f(\cdot) \in \mathcal{R}^n$ ,  $g(\cdot) \in \mathcal{R}^l$  — вектор-функции векторных аргументов. Для стационарных систем функции  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  не зависят явно от времени.

Данное описание применимо к ММО-системам. Для SISO-систем ( $m = l = 1$ ) используется запись в виде одного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$F\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^su}{dt^s}, t\right) = 0.$$

Это уравнение во многих случаях разрешимо относительно старшей производной и может быть записано в виде

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n} = \varphi\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^su}{dt^s}, t\right). \quad (10.2)$$

Из этого уравнения естественным образом может быть получена *нормальная форма Коши* (10.1). Действительно, введем переменные  $x_1(t) \triangleq y(t)$ ,  $x_2(t) \triangleq \frac{dy}{dt}$ , ...,  $x_n(t) \triangleq \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$ . Тогда, учитывая, что введенные переменные являются последовательными производными и принимая во внимание уравне-

ние (10.2), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= \varphi\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^s u}{dt^s}, t\right), \end{cases} \quad (10.3)$$

$$y(t) = x_1(t).$$

Обратимся теперь к некоторым "типовым" статическим звеньям, уравнения которых часто встречаются при описании нелинейных зависимостей. Рассматриваем стационарные звенья  $y = F(x)$  с одним входом и одним выходом.

1. *Насыщение.* Функция  $F(x)$  ограничена значениями  $F_-$ ,  $F_+$ , т.е. для всех  $x \in \mathcal{R}$  выполнено  $F_- \leq F(x) \leq F_+$ . Часто рассматриваются кусочно-линейные функции, которые в соответствующем масштабе могут быть выражены зависимостью  $y(x) = \text{sat}(x)$ , где

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -1, & x < -1. \end{cases}$$

2. *Нечувствительность.* Функция  $F(x)$  обращается в ноль для всех  $x$ , лежащих в некоторой окрестности нуля,  $F(x) = 0$  при  $x \in [x_-, x_+]$ ,  $x_- < 0 < x_+$ . Обычно рассматриваются кусочно-линейные симметричные зависимости, которые можно задать выражением

$$F(x) = \begin{cases} x - \Delta, & x > \Delta, \\ 0, & -\Delta \leq x \leq \Delta, \\ x + \Delta, & x < -\Delta, \end{cases}$$

где  $\Delta > 0$  – порог чувствительности (зона нечувствительности).

3. *Нечувствительность с насыщением.* Сочетание характеристик указанных в пп. 1, 2 типов. При кусочно-линейной аппроксимации эта характеристика может быть задана в виде

$$F(x) = \begin{cases} \text{sat}(x - \Delta), & x > \Delta, \\ 0, & -\Delta \leq x \leq \Delta, \\ \text{sat}(x + \Delta), & x < -\Delta. \end{cases}$$

Группа релейных ("разрывных") характеристик:

4. "Идеальное" двухпозиционное реле, сигнум-функция.  $y(x) = c \cdot \text{sign}(x)$ , где сигнум-функция (функция знака)  $\text{sign}(x)$  описывается выражением

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

где параметр  $c > 0$  – величина "полки реле".<sup>4</sup>

5. Двухпозиционное реле с нечувствительностью. Сочетание характеристик пп. 2, 4:

$$F(x) = \begin{cases} c, & x > \Delta \\ 0, & -\Delta \leq x \leq \Delta, \\ -c + \Delta, & x < -\Delta. \end{cases} \quad (10.4)$$

6. Ступенчатая характеристика. Такой вид нелинейности свойственен аналого-цифровым преобразователям, выполняющим операции округления или усечения, вызванные ограниченностью разрядной сетки управляющей ЦВМ, а также свойственное некоторым видам датчиков систем управления.

Группа неоднозначных характеристик:

7. Гистерезис (положительный или отрицательный),

8. Люфт, консервативный люфт,

а также комбинации этих характеристик релейными зависимостями и нечувствительностью. Сюда относятся характеристики двухпозиционного и трехпозиционного реле.

**З а м е ч а н и е 1 .** Строго говоря, нелинейности с неоднозначными характеристиками относятся не к статическим, а к динамическим звеньям со специфичными уравнениями и пространством состояний. Выход этих звеньев зависит не только от текущего значения входа, но и от его предыстории и начального состояния. Поэтому для них правильнее использовать запись  $y(t) = F(u_{[t_0, t]}, t)$  [94].

---

<sup>4</sup> Вообще говоря, значение  $\text{sign}(0)$  необязательно должно быть нулевым. По некоторым соображениям, удобнее использовать включение и считать, что  $\text{sign}(0)$  является отрезком  $[-1, 1]$ ; тогда  $y(x) \in c \text{sign}(x)$ , см. 11.6.2. и [30, 102].

**З а м е ч а н и е 2 .** В некоторых случаях рассматриваются характеристики вида  $y(t) = F(u(t), \dot{u}(t), t)$ . Звенья с такими характеристиками не описываются уравнениями состояния (10.1), но фактически являются динамическими. Выход  $y(t)$  таких звеньев определяется поведением входного процесса на некотором (бесконечно малом) интервале времени [44]. Исходя из этого, нелинейности указанного вида называют *динамическими нелинейностями*.

Рассмотрим замкнутую динамическую систему, состоящую из динамического объекта и регулятора, заданных уравнениями

$$\dot{x}_p(t) = f_p(x_p(t), u(t), t), \quad y(t) = g_p(x_p(t), u(t), t), \quad (10.5)$$

$$\dot{x}_c(t) = f_c(x_c(t), y(t), t), \quad u(t) = g_c(x_c(t), y(t), t), \quad (10.6)$$

в которых через  $x_p(t) \in \mathcal{R}^{n_p}$ ,  $x_c(t) \in \mathcal{R}^{n_c}$  обозначены векторы состояния объекта управления и регулятора, через  $y(t) \in \mathcal{R}^l$  – выход объекта, который считается выходом замкнутой системы, а через  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  – управляющее воздействие, которое поступает с выхода регулятора. Задающее (командное) воздействие и возмущения отражены зависимостью вектор-функций  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  от времени. Подстановкой выражений для  $u(t)$  и  $y(t)$  из уравнений выхода в соответствующие уравнения состояния получаем уравнения состояния замкнутой системы относительно общего вектора состояния  $\bar{x}(t) \triangleq \text{col}\{x_p(t), x_c(t)\} \in \mathcal{R}^n$ ,  $n = n_p + n_c$ , в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), t), \quad y(t) = g(\bar{x}(t), t). \quad (10.7)$$

**З а м е ч а н и е 1 .** Далеко не во всех случаях и объект, и регулятор являются динамическими звеньями. Распространены ситуации, в которых регулятор – статическое (например, релейное, или линейное) звено. Тогда векторы состояния расширенной и исходной систем совпадают, а для статической подсистемы записываются только уравнения выхода.

**З а м е ч а н и е 2 .** Если оба уравнения выхода содержат ”прямую связь” между входом и выходом соответствующей подсистемы, т.е. если и объект, и регулятор не являются строго реализуемыми звеньями, то при указанной подстановке возникает ”замкнутый контур”, появление которого приводит к необходимости разрешения системы алгебраических

уравнений

$$\begin{cases} g_p(x_p(t), u(t), t) = 0, \\ g_c(x_c(t), y(t), t) = 0. \end{cases}$$

При моделировании таких систем можно использовать процедуры решения алгебро-дифференциальных уравнений [72].

Такое представление уравнений замкнутой нелинейной системы соответствует делению по функциональному признаку (на объект управления и регулятор). Это естественно при составлении уравнений системы, однако для дальнейших исследований более удобной бывает запись уравнений замкнутой системы в форме так называемой *системы Лурье*, в которой выделяются линейная и нелинейная части, причем вся динамика системы сосредоточена в линейной части, а нелинейность является статической (с учетом приведенного выше замечания относительно неоднозначных нелинейных характеристик). Рассмотрим эту форму записи более подробно.

Пусть линейная часть системы задается уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)\xi(t) + r(t), \\ \sigma(t) &= C(t)x(t) + D(t)\xi(t), \end{aligned} \quad (10.8)$$

а нелинейная часть описывается своей статической характеристикой

$$\xi(t) = \varphi(\sigma, t). \quad (10.9)$$

Здесь  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния линейной части системы (10.8), одновременно служащий вектором состояния системы в целом;  $\sigma(t) \in \mathcal{R}^l$  – вектор выхода линейной части системы;  $\xi(t) \in \mathcal{R}^m$  – вектор выхода нелинейной части системы (10.9). Вектор-функция  $r(t) \in \mathcal{R}^n$  и зависимость  $\varphi(\cdot)$  от  $t$  в уравнениях (10.8), (10.9) позволяют учесть внешние воздействия на систему (рис. 10.1).

При кажущейся ограниченности такой формы записи уравнений замкнутой системы она является достаточно общей. Действительно, если положить в (10.8), (10.9)  $A(t) \equiv \mathbf{0}_{n \times n}$ ,  $B(t) \equiv C(t) \equiv \mathbf{I}_n$ ,  $D(t) \equiv \mathbf{0}_{n \times n}$ , т.е. если принять, что линейная часть – совокупность независимых интеграторов, все выходы

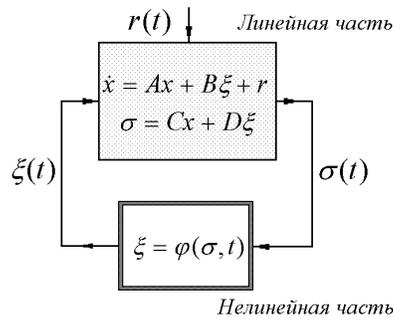


Рис. 10.1. Структура нелинейной системы в виде взаимосвязанных линейной и нелинейной подсистем.

которых образуют вектор  $\sigma(t)$ , а на входы каждого из них поступают соответствующие компоненты вектора  $\xi(t)$ , получим  $\dot{x}(t) = \xi(t)$ ,  $\sigma(t) = x(t)$ . Положив  $\varphi(x, t) \equiv f(x, t)$ , получаем, что к системе Лурье приводятся общие уравнения нелинейной и нестационарной системы  $\dot{x}(t) = f(x, t)$ .

Если в системе имеется один нелинейный блок со скалярным выходом  $\xi(t) \in \mathcal{R}$  (либо если преобразованием нелинейных звеньев ее можно привести к такому виду),<sup>5</sup> то линейную часть (ЛЧ) системы в стационарном случае можно описать передаточной функцией между входом ЛЧ  $\xi$  и выходом  $\sigma$ :  $W_l(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$ . Получаем распространенный вид системы, замкнутой обратной связью. Особенность состоит в том, что обратная связь нелинейна.

**З а м е ч а н и е.** Поскольку в теории управления принято обычно рассматривать системы, замкнутые отрицательной обратной связью, можно изменить знак передаточной функции линейной части  $W_l(s)$ , либо считать, что выход нелинейного блока определяется выражением  $\xi(t) = -\varphi(\sigma, t)$ .

### 10.3. Особенности процессов в нелинейных системах

Как отмечено выше, нелинейные системы отличаются от линейных весьма сложным и разнообразным поведением. Можно считать, что причиной этого является невыполнение прин-

<sup>5</sup> Такое преобразование выполнимо, если несколько нелинейных статических звеньев связаны непосредственно между собой и между ними нет промежуточных динамических звеньев (более подробно см. [15, 76]).

ципа суперпозиции для нелинейных систем. Рассмотрим некоторые, наиболее характерные, особенности поведения таких систем.

### 10.3.1. Принцип суперпозиции

Обратимся теперь к общему определению линейных динамических систем [44].

Как отмечено в п. 1.1. выход  $y(t)$  динамической системы определяется функциональным уравнением

$$y(t) = \mathcal{S}(x(t_0); u_{[t_0, t]}),$$

где  $x(t_0)$  – начальное состояние системы,  $u_{[t_0, t]}$  – входное воздействие, заданное на интервале  $[t_0, t]$ ,  $t > t_0$ .

**Определение [44].** Система называется *линейной*, если она:

- Линейна относительно всех начальных состояний, т.е. для всех  $t_0, t > t_0, x(t_0) = x_0, u_{[t_0, t]}, v_{[t_0, t]}, k$  выполнено:

$$k(\mathcal{S}(x_0; u_{[t_0, t]}) - \mathcal{S}(x_0; v_{[t_0, t]})) = \mathcal{S}(\mathbf{0}; k(u_{[t_0, t]} - v_{[t_0, t]})), \quad (10.10)$$

т.е. при любом начальном состоянии разность между реакциями на произвольные входные воздействия равна реакции на разность этих же воздействий, полученную при нулевом начальном состоянии.

- Линейна при нулевом входе, т.е. для всех  $t, t_0, x'(t_0) = x'_0, x''(t_0) = x''_0, k$  выполнено:

$$k(\mathcal{S}(x'_0; O) - \mathcal{S}(x''_0; O)) = \mathcal{S}(k(x'_0 - x''_0); O), \quad (10.11)$$

т.е. при нулевом входе реакция на линейную комбинацию начальных состояний равна такой же линейной комбинации реакций при каждом начальном состоянии в отдельности.<sup>6</sup>

Из свойства (10.10), в частности при  $k = 1, v = O$ , следует  $\mathcal{S}(x_0; u_{[t_0, t]}) - \mathcal{S}(x_0; O) = \mathcal{S}(\mathbf{0}; u_{[t_0, t]})$ , откуда

$$y(t) = \mathcal{S}(x_0; O) + \mathcal{S}(\mathbf{0}; u_{[t_0, t]}).$$

Другими словами, справедливо *свойство разделения* – движение линейной системы при любых начальных условиях и

<sup>6</sup> Здесь через  $\mathbf{0}$  обозначен нулевой элемент пространства состояний  $\mathcal{X}$ , а через  $O$  – нулевой элемент пространства функций,  $u(t) \equiv 0$ .

любом входном воздействии можно получить как сумму *переходной* и *вынужденной* составляющих. Переходная составляющая  $\mathcal{S}(x_0; O)$  есть процесс, полученный при нулевом входе и заданных начальных условиях  $x_0$ , а вынужденная составляющая  $\mathcal{S}(\mathbf{0}; u_{[t_0, t]})$  есть реакция системы на заданное входное воздействие при нулевых начальных условиях.

Свойство (10.11) приводит к тому, что характер собственных движений системы не зависит от размеров области пространства состояний, в которой эти движения рассматриваются. Более точно, полагая в (10.11)  $x'_0 = x_0$ ,  $x''_0 = \mathbf{0}$ , получим для всех  $k$ ,  $x_0$

$$\mathcal{S}(kx_0; O) = k\mathcal{S}(x_0; O).$$

Следовательно, вид фазовых портретов линейных стационарных систем не зависит от размера окрестности начала координат – эти фазовые портреты можно преобразовать друг к другу изменением масштаба.

Совокупности этих свойств (либо одного из них) лишены нелинейные системы. Это приводит к эффектам, некоторые из которых рассмотрены ниже. Основное внимание уделим собственным движениям в нелинейных системах – характер вынужденных процессов оказывается еще более сложным и разнообразным.

### 10.3.2. Сепаратрисные поверхности

Как отмечено выше, у нелинейных систем может быть различный характер собственных движений в разных областях пространства состояний. Поэтому при исследовании таких систем недостаточно, вообще говоря, рассматривать лишь некоторую окрестность состояния равновесия – исследование должно охватывать все возможные области пространства состояний. Естественно, это сильно усложняет анализ. При использовании численных методов исследования (например, моделирования на ЭВМ) количество вычислений оказывается значительно выше, чем для линейных систем. Это показывает необходимость развития аналитических методов исследования.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий простой пример. Пусть система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Система имеет два состояния равновесия:  $x_1^* = 0$  и  $x_2^* = 1$ . Не трудно убедиться, что при  $x_0 < 1$  знаки  $\dot{x}(t)$  и  $x(t)$  противоположны и решение будет стремиться к точке  $x_1^*$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ . При  $x_0 > 1$  выполнено  $\dot{x}(t) > 0$  и решение расходится,  $x(t) \rightarrow \infty$  (причем значение  $x(t)$  становится неограниченно большим за конечное время). Таким образом,  $x_1^*$  – устойчивое состояние равновесия, а  $x_2^*$  – неустойчивое. Точка  $x = 1$  разделяет пространство состояний  $\mathcal{X} = \mathcal{R}$  на области с устойчивым и неустойчивым характером поведения.

**Определение [79].** Поверхность, разделяющая пространство состояний системы на области с разными типами фазовых траекторий (т.е. видов собственных движений) называется *сепаратрисной поверхностью* (при  $n = 2$  разделяющая поверхность является некоторой кривой, называемой *сепаратрисой*).  $\square$

Более точное определение – сепаратрисная поверхность есть поверхность, являющаяся либо элементом притяжения, либо элементом отталкивания для всех близких траекторий.

Иногда (как в приведенном примере) сепаратрисой является некоторая фазовая траектория. Возможно также, что сепаратрисы образуются из участков различных траекторий (рис. 10.2, а). В 11.6. рассмотрены системы, для которых движение происходит по сепаратрисной поверхности, но само понятие соответствующего решения уравнений нуждается в дополнительном определении.

### 10.3.3. Предельные циклы. Автоколебания

Для некоторых систем могут, как известно, существовать периодические процессы с периодом  $T$  такие, что  $x(t) = x(t+T)$  (более подробное определение периодических процессов дано выше в 5.1. и [79, 93]). Соответствующие им фазовые траектории представляют собой замкнутые кривые. Для стационарных линейных систем периодические собственные движения имеют место, если характеристический многочлен  $A(s) = 0$  при некотором  $s = j\Omega$ . (Период  $T = 2\pi/\Omega$ .) Такой вид движений свойствен, например, колебательным консервативным звеньям.

Важно отметить, что колебания, возникающие у линейных систем, являются *негрубыми* в том смысле, что сколь угодно малое отклонение параметров системы от исходных может

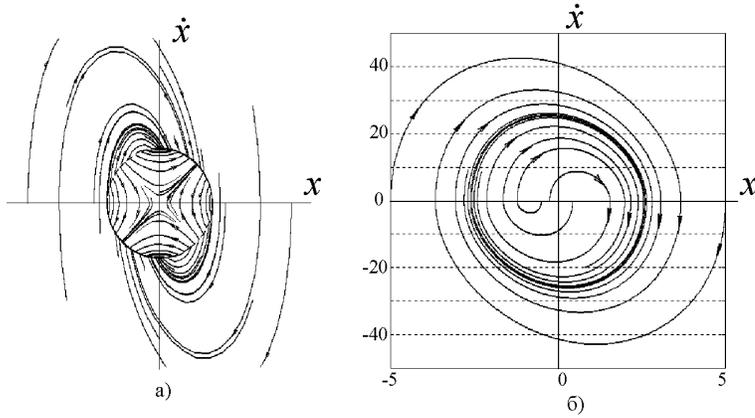


Рис. 10.2. Сепаратрисы и предельный цикл.

привести к исчезновению периодических движений. Кроме того, малое изменение начального состояния системы приводит к пропорциональному изменению амплитуды колебаний, как это видно из формулы Коши (6.8) для решений линейных систем. У нелинейных систем возможно существование *грубых* периодических процессов, характеристики которых не меняются (качественно) при изменении в определенных пределах параметров или начальных условий. Рассмотрим это явление подробнее.

Пусть автономная система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (10.12)$$

**Определение [79].** Периодическое решение  $x(t)$ , а также соответствующая ему траектория  $\mathcal{G}$ , считается *изолированным периодическим решением* и называется *предельным циклом*, если существует такое  $\rho > 0$ , что какова бы ни была точка  $x' \in \mathcal{X}$ , находящаяся от кривой  $\mathcal{G}$  на положительном расстоянии  $\rho_{\mathcal{G}}(x')$ ,<sup>7</sup> меньшем, чем  $\rho$ ,  $0 < \rho_{\mathcal{G}}(x') < \rho$ ; проходящее через нее решение уравнения (10.12) не является периодическим.  $\square$

<sup>7</sup> Расстояние  $\rho_{\mathcal{G}}(x)$  от точки  $x$  до кривой  $\mathcal{G}$  в пространстве  $\mathcal{R}^n$  можно определить как  $\rho_{\mathcal{G}}(x) \triangleq \inf_{x_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}} (\|x - x_{\mathcal{G}}\|)$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая (например, евклидова) векторная норма в  $\mathcal{R}^n$ .

Это означает, что при  $n = 2$  на фазовой плоскости вблизи предельных циклов не проходит других замкнутых траекторий решений уравнения (10.12). Отметим, что у линейных консервативных систем замкнутые траектории лежат "всюду плотно" – на сколь угодно малом расстоянии от данной замкнутой кривой находятся другие замкнутые траектории.

Как для внешних, так и для внутренних по отношению к предельному циклу  $\mathcal{G}$ <sup>8</sup> имеются две взаимно исключающие возможности поведения вблизи  $\mathcal{G}$ : все внутренние траектории, начинающиеся вблизи  $\mathcal{G}$  "наматываются" на  $\mathcal{G}$ , как спирали либо при  $t \rightarrow \infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$ . То же самое относится и ко внешним траекториям [79].

Если все внутренние и внешние траектории, начинающиеся вблизи  $\mathcal{G}$  "наматываются" на  $\mathcal{G}$  при  $t \rightarrow \infty$ , то предельный цикл называется *устойчивым*. Соответственно, возможны (вполне) *неустойчивые* и *полустойчивые* предельные циклы.

**Определение (А.А. Андронов, см. [79]).** Устойчивый предельный цикл называется *автоколебанием*.  $\square$

Таким образом, автоколебания представляют собой процесс, характерный исключительно для нелинейных систем. Практически можно считать, что такой процесс имеет место, когда состояние равновесия системы неустойчиво "в малом", но система обладает диссипативностью, так что процессы при "больших" начальных отклонениях затухают. В качестве примера на рис. 10.2, б показан фазовый портрет автоколебательной системы  $T^2\ddot{x} + 2\xi T\dot{x} + x = ku$ ,  $u = c \operatorname{sign}\dot{x}$ , ( $T = 0.1$  с,  $\xi = 0.25$ ), являющейся упрощенной моделью генератора колебаний [79, 94]. Эта система исследуется ниже в п.п. 11.2.2. 11.3. Заметим, что предельный цикл является и сепаратрисой.

Нелинейным системам свойственны не только периодические собственные процессы. Возможны также квазипериодические режимы, соответствующие колебательным движениям с несоизмеримыми частотами. Более того, возможно возникновение хаотических колебательных процессов, имеющих непрерывный спектр частот и, следовательно, обладающих свойствами, характерными для случайных процессов. Уста-

---

<sup>8</sup> Для простоты изложения сейчас рассматриваем случай фазовой плоскости,  $n = 2$ .

новившиеся хаотические процессы отличаются от предельных циклов и описываются притягивающими множествами – *аттракторами*. Сведения о хаотических системах и методах их исследования приведены в п. 13.3.

Наиболее общее из известных определений колебательных процессов, включающее как периодические, так и нерегулярные, хаотические, предложено В.А. Якубовичем в 1973 г. (см. [55, 56, 76, 93])

**Определение .** Решение  $x(t)$ ,  $\sigma(t)$  системы (10.8), (10.9) называется *колебательным* (или *колебательным по Якубовичу*) по выходу  $\sigma$ , если выполнены следующие условия: 1)  $\|x(t)\| \leq \text{const}$ ; 2) Число изменений знака функции  $\sigma(t)$  бесконечно на  $t \in [0, \infty)$ ; 3) Число выходов  $\sigma(t)$  за пределы заданного интервала  $[-\alpha, \beta]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , бесконечно на  $t \in [0, \infty)$ .  $\square$

#### 10.3.4. Состояния равновесия. Отрезки покоя

Обратимся теперь к состояниям равновесия нелинейных систем. Выше было отмечено, что такими состояниями являются особые точки, в которых вектор фазовой скорости  $v$  обращается в ноль. Для линейных стационарных систем  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  выполнено  $v(x) = Ax$ , поэтому множество состояний равновесия  $\{x^*\}$  – либо начало координат (при  $\det A \neq 0$ ), либо многообразие более высокой размерности, но всегда – некоторое линейное подпространство (аннулируемое подпространство  $\mathcal{N}(A)$  матрицы  $A$ ) пространства состояний,  $\{x^*\} = \mathcal{N}(A)$ ,  $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{X}$ , см. сноску 3 на с. 113.

Для нелинейных систем особые точки определяются из уравнения (10.12), согласно которому состояния равновесия  $x^*$  должны удовлетворять нелинейному алгебраическому уравнению (точнее – системе уравнений относительно компонент  $x_i^*$  вектора  $x^*$ ):

$$f(x^*) = 0. \quad (10.13)$$

Отсюда видно, что в зависимости от правых частей уравнения (10.12), множество состояний равновесия  $\{x^*\}$  могут иметь сложную структуру. Это может быть совокупность изолированных точек либо отрезков прямой (*"отрезок покоя"*), часть плоскости (*"пластинка покоя"*, *"зона застоя"*) и т.д.

Для иллюстрации на рис. 10.3 приведены примеры фазовых портретов систем с множеством изолированных состояний равновесия (а) и с отрезком покоя (б).<sup>9</sup>

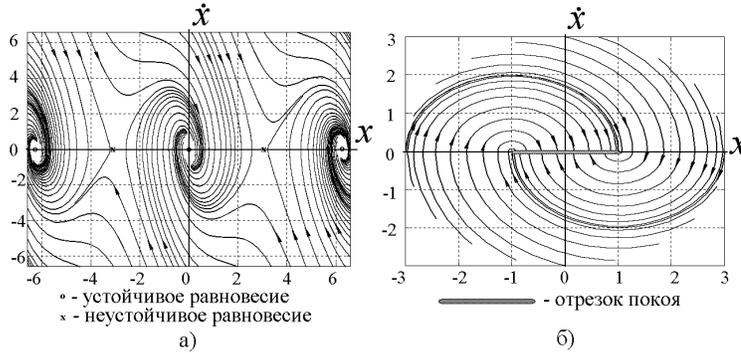


Рис. 10.3. Состояния равновесия нелинейных систем.

### 10.3.5. Неединственность решений. Пересечение траекторий

Как известно из теории дифференциальных уравнений [12], уравнение (10.12) имеет решение, притом единственное, при выполнении так называемого *условия Липшица*, согласно которому для всех  $x', x'' \in \mathcal{X}$  существует константа (*константа Липшица*)  $L > 0$  ( $L < \infty$ ) не зависящая от  $x', x''$ , что имеет место

$$\|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|. \quad (10.14)$$

Это утверждение является одной из теорем о существовании и единственности решений нормальной системы дифференциальных уравнений (10.12) [12, 79]. Условие Липшица означает, что функция  $f(x)$  не должна изменяться в любой области пространства  $\mathcal{X}$  быстрее некоторой линейной функции с константой, не зависящей от выбора области.

Для линейных систем условие (10.14), очевидно, выполнено, что позволило в п. 5.1. сформулировать общие свойства

<sup>9</sup> а – фазовый портрет системы  $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 5 \sin x = 0$ ; б – системы  $\ddot{x} + \text{sign}\dot{x} + x = 0$ .

фазовых портретов таких систем. Для нелинейных систем условие Липшица может быть нарушено. Например, система может содержать "разрывную" (релейную) нелинейность. Тогда в окрестности точек разрыва правые части уравнения (10.12) растут неограниченно быстро. Другим примером являются квадратичные, кубические нелинейности, произведения переменных состояния в  $f(x)$  и т.д.<sup>10</sup>

В зависимости от вида функции  $f(x)$  для нелинейных систем возможны разные процессы, вызванные нарушением указанного условия. Например, возможно слияние различных фазовых траекторий в одну. Такой вид поведения свойствен, прежде всего системам с *разрывными* нелинейностями. Например, в *оптимальных по быстрдействию* системах во многих случаях все траектории сливаются в одну, проходящую через заданную точку [76]. В системах с *релейно-логическим* управлением также возможен предельный цикл, состоящий из участков фазовых кривых, на который изображающая точка попадает из различных начальных условий за конечное время (см. рис. 10.4, а). Характерно также появление *скользящих режимов*, при которых разные траектории попадают через конечное время на некоторую поверхность (не являющуюся, вообще говоря, решением (10.12)). Как частный случай движение по некоторой траектории может за конечное время привести к состоянию равновесия системы. Это означает, что переходный процесс в непрерывной нелинейной системе может иметь конечную длительность, что исключено для стационарных непрерывных линейных систем.

Заметим, что для таких систем теряется возможность определить развитие процесса в прошлом по его текущему состоянию. Ранее динамические детерминированные системы были определены как системы, у которых по начальному состоянию и входному процессу можно однозначно определить будущее поведение. Отмеченное выше свойство не противоречит данному определению, так как последнее относится к будущему, а не к прошлому развитию процесса. Рассмотрим

<sup>10</sup> Иногда используется так называемое *локальное условие Липшица* (в отличие от глобального (10.14)), согласно которому константа  $L$  должна "обслуживать" лишь некоторую ограниченную область пространства состояний [36]. Тогда, например для  $f(x) = x^2$ , выполнено локальное условие Липшица, а для  $f(x) = \text{sign}(x)$  в окрестности точки 0 оно не выполнено. Глобальное условие Липшица (10.14) не выполнено в обоих случаях.

теперь следующий пример.

Пусть система описывается уравнением первого порядка

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(x(t))\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = x_0.$$

Положим  $x_0 = 0$ . Очевидно, уравнение имеет тривиальное решение  $x_1(t) \equiv 0$ . Кроме того, непосредственной подстановкой убеждаемся, что функции  $x_2(t) = \frac{t^2}{4}$  и  $x_3(t) = -\frac{t^2}{4}$  также есть решения данного уравнения при указанном начальном условии.

Заметим, что в данном примере условие Липшица нарушено в окрестности начала координат.

Следовательно, нелинейность уравнений системы может привести к сложности в определении самого понятия ее состояния. Конечно, при технической реализации такой системы или ее моделировании развитие процесса пойдет по конкретной траектории, однако полученное решение будет сильно зависеть от начальных условий, погрешностей, возмущений. Здесь мы обращаем внимание на возникающие теоретические затруднения.

### 10.3.6. Скользящие режимы

Важным классом нелинейных систем с разрывной правой частью являются системы, для которых свойственно существование *скользящих режимов* – движения изображающей точки по *поверхности разрыва*, вызванное тем, что векторы фазовой скорости направлены относительно этой поверхности в противоположные области. В результате изображающая точка движется по поверхности разрыва, причем вектор фазовой скорости не может быть определен по уравнениям системы ни для одной из областей. Возникновение скользящего режима на кривой, заданной уравнением  $\sigma(x) = 0$ , показано на рис. 10.4, б. Как видно из рисунка, векторы фазовой скорости вблизи границы разрыва направлены в противоположные области. Это приводит к тому, что изображающая точка за конечное время попадает на кривую  $\sigma(x) = 0$  и далее движется по ней. Здесь также наблюдается пересечение различных фазовых траекторий.

Возникает задача определения движения системы по указанной поверхности, другими словами – определения реше-

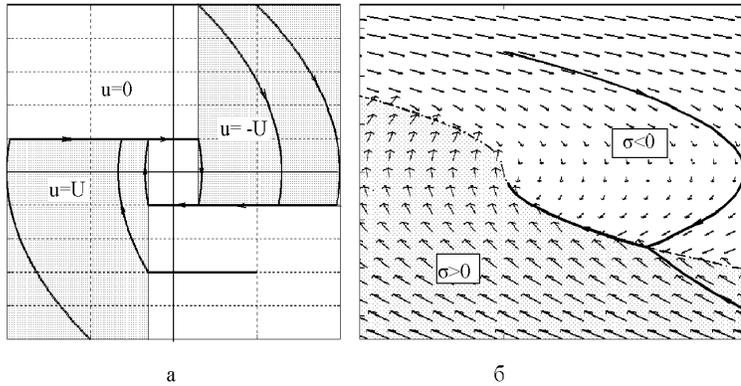


Рис. 10.4. Пересекающиеся траектории и скользящий режим

ния уравнения (10.12), если функция  $f(x)$  претерпевает разрыв (по  $x$ ) в каждый момент времени. Известен ряд подходов к решению этой задачи (см. [30, 102]). Некоторые из них будут рассмотрены в п. 11.6.

### 10.3.7. Влияние внешних воздействий

Для нелинейных нестационарных систем, систем подверженных внешним воздействиям, характер поведения становится еще более сложным. Как отмечено выше, в нелинейном случае отсутствует свойство разделения, поэтому как устойчивость, так и качество процессов в таких системах следует изучать, вообще говоря, с учетом одновременно как начальных условий, так и внешних воздействий.

При внешних воздействиях могут возникать такие явления, как *подавление* и *возбуждение* автоколебаний (в зависимости от входного процесса), *принудительная синхронизация* колебаний, режим *биений*, явление *скачкообразного* и *параметрического резонанса*, возникновение *хаотических процессов* и т.д. [15, 72, 76].

Актуальным является вопрос изучения влияния нелинейных звеньев на свойства системы, для которой в основном применимо линейное описание. Здесь могут быть самые разнообразные ситуации. Остановимся лишь на некоторых.

При наличии нечувствительности датчиков систем упра-

вления прежде всего падает точность системы. Кроме того, для статически неустойчивых объектов управления из-за вызванного нечувствительностью уменьшения коэффициента передачи при малых отклонениях состояние равновесия становится неустойчивым. Это может привести к автоколебательному (или даже расходящемуся) процессу [113]. Аналогичное влияние оказывает квантование сигналов по уровню в системах с цифровыми регуляторами [15, 76].

Влияние насыщения аналогично уменьшению коэффициента усиления для сигналов большой амплитуды. Если для абсолютно устойчивых систем это приводит к потере точности, то для условно устойчивых систем насыщение может привести к неустойчивости. Кроме того, при насыщении сигнала управления доля демпфирующих составляющих в управляющем воздействии уменьшается, что также может привести к нежелательным с точки зрения устойчивости системы явлениям [113].

Релейные (разрывные) характеристики при малых отклонениях входного сигнала проявляют себя как звенья с большим коэффициентом усиления. Это приводит к повышению точности, однако может вызвать нежелательные автоколебания или нарушение устойчивости системы [76, 94, 102, 106].

## 11. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 11.1. Задачи и методы теории нелинейных систем

Имеются две основные задачи теории нелинейных систем управления.

Первая основная задача – *анализ*. Анализ состоит в исследовании известной математической модели системы с целью определения ее свойств и установления зависимости этих свойств от параметров системы. Различают следующие задачи анализа.

**Анализ при фиксированных параметрах.** При исследовании свободного движения системы устанавливается разбиение пространства состояний на траектории. Выясняются существование и устойчивость установившихся режимов (к которым относятся состояния равновесия, предельные циклы), выясняются области притяжения этих режимов. Производится оценка качества переходных процессов.

Выполняется исследование характера вынужденных режимов при влиянии на систему внешних воздействий. Здесь требуется учитывать виды и уровни воздействий, возникающих в процессе эксплуатации системы.

**Анализ при различных параметрах.** Рассматривается класс нелинейных систем одинаковой структуры, но обладающих различными параметрами  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ . Точка в *пространстве параметров*  $\{\mu\}$  отвечает конкретной системе из данного класса. Пространство параметров разбивается на области с топологически эквивалентными фазовыми портретами. Границы этих областей называются *бифуркационными поверхностями*, построение которых и входит во вторую задачу анализа.

Вторая основная задача – *синтез*. Синтез заключается в определении закона управления, обеспечивающего требуемое (например, оптимальное, в каком-либо смысле) качество работы системы. Синтез может выполняться при *заданной* или *свободной структуре* регулятора.

**Синтез при заданной структуре регулятора.** Вид закона управления считается заданным, задача состоит в *параметрическом синтезе*, т.е. в определении параметров регулятора, обеспечивающих наилучшее значение заданного по-

казателя качества.

Наиболее простой с точки зрения привлекаемой теории является параметрический синтез. Он выполняется посредством анализа и отбора вариантов с помощью известных в математическом программировании алгоритмов оптимизации. Здесь, правда, следует учитывать, что объем работ при анализе может оказаться недопустимо большим для его многократного выполнения. Кроме того, важно правильно построить функцию качества системы, которая бы адекватно отражала характерную для практики многокритериальность при формализации задачи. Поэтому при параметрическом синтезе имеют большое значение и теоретические исследования.

**Синтез при свободной структуре регулятора.** Вид закона управления не задан и должен быть получен в результате синтеза. При такой постановке задачи используются методы перечисленных в п. 10.1. направлений теории систем (оптимальное, адаптивное и экстремальное управление, методы нелинейной коррекции, систем с переменной структурой и т.д.). Вопрос об использовании того, или иного, метода решается на основе предъявленных к системе требований и сведений об условиях ее работы.

Несмотря на то что синтез при свободной структуре регулятора кажется еще более сложным, чем параметрический синтез, надо заметить, что в теории известны некоторые подходы, при которых структура, а иногда и параметры закона управления, получаются "автоматически" исходя из цели управления. Это относится, например, к решению ряда оптимизационных задач [76, 94], к синтезу адаптивных законов управления [103, 106] и регуляторов с переменной структурой на скользящих режимах [102, 191]. Некоторые из перечисленных методов рассматриваются ниже.

Теория нелинейных систем прошла длительный путь становления и продолжает интенсивно развиваться в настоящее время. Эта теория постоянно обогащается результатами, в ее рамках появляются новые направления.

Методы теории нелинейных систем можно разбить на *аналитические* и *численные*. Аналитические методы в свою очередь можно разделить на *точные* и *приближенные*. Среди численных методов исследования основную роль играют сейчас

*машинные* методы, связанные с изучением свойств нелинейных систем на ЭВМ, хотя находят применение и *графические*, или *графо-аналитические*, методы.

Точные методы в отличие от приближенных имеют строгое теоретическое обоснование, ясна область их применения, полученные с помощью этих методов результаты дают точные (с учетом выполненных предварительных допущений) сведения о системе. К недостаткам этих методов относится обычно сравнительно узкая область применения – некоторые усложнения модели системы могут привести к невозможности найти подходящий точный метод. Другим их недостатком могут оказаться высокие требования к теоретической подготовке исследователя. Приближенные методы менее зависят от сложности рассматриваемой задачи и, кроме того, ориентированы на использование инженерных методик проектирования.

Аналитические методы в принципе позволяют получить результат в общем виде – в форме соотношений, связывающих параметры системы с ее характеристиками. Это упрощает процедуру параметрического синтеза. Но аналитические методы обладают меньшей универсальностью, чем численные. Это связано с известной сложностью аналитического исследования нелинейных систем. Другой проблемой, возникающей при использовании аналитических методов, может стать сложность полученных выражений для последующего использования. В этом случае может оказаться, что непосредственное применение численных методов позволяет с меньшими предварительными затратами и допущениями получить требуемый результат.

Ниже будут рассмотрены некоторые известные методы исследования нелинейных систем.

## 11.2. Методы фазового пространства

Методы фазового пространства относятся к наиболее ранним точным аналитическим методам теории нелинейных систем. К ним относится *метод фазовой плоскости* (Леоте, 1885) и *метод точечных отображений* (Пуанкаре, Биркгоф) [79].

### 11.2.1. Метод фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости используется для исследования автономных систем второго порядка и заключается в построении фазовых портретов. Для этого из уравнений состояния исключается время и определяются уравнения фазовых кривых. При использовании этого метода целесообразно приведение уравнений системы к канонической форме.

Задача становится достаточно простой, если рассматривается система с кусочно-линейной характеристикой. Тогда в разных областях пространства состояний система описывается линейными уравнениями, в соответствии с которыми строятся фазовые траектории. Далее выполняется "сшивание" траекторий по линиям переключения, определяемым видом нелинейной зависимости. Это позволяет построить фазовый портрет исследуемой нелинейной системы.<sup>1</sup> Далее, поскольку состояния на границах интервалов определены, можно получить и вид переходных процессов в системе (*метод приспособивания*).

Хотя этот метод имеет ограниченное применение, он остается удобным средством исследования нелинейных систем невысокого порядка с "простыми" нелинейными характеристиками.

### 11.2.2. Метод точечных отображений

Метод точечных отображений, или *отображений Пуанкаре*, состоит в построении некоторой *секущей поверхности*  $\mathcal{L}$  и траекторий, выпущенных из  $\mathcal{L}$ . Одно из основных применений метода – анализ устойчивости и определение параметров (частоты и амплитуды) предельных циклов при  $n = 2$ . Изложим вкратце основные положения данного метода, следуя [79].

Пусть  $\mathcal{G}$  есть некоторый предельный цикл. Выберем кривую  $\mathcal{L}$  – секущую, без касания пересекающую  $\mathcal{G}$ . Пусть точка  $x_0 \in \mathcal{G}$ ,  $x_0 \in \mathcal{L}$  – точка пересечения кривых  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{L}$ . Выберем близкую к ней точку  $x' \in \mathcal{L}$ . Пусть соответствующая  $x'$  траектория пересекает в следующий раз кривую  $\mathcal{L}$  в некоторой точке  $x'' \in \mathcal{L}$ . Зависимость  $x'' = \Psi(x')$  есть *точечное отобра-*

---

<sup>1</sup> Здесь используется свойство, согласно которому конечные значения состояния системы на некотором интервале могут использоваться в качестве начальных для следующего интервала, см. 1.1.

жение, переводящее исходную точку пространства состояний в другую в соответствии с уравнениями системы. Точка  $x_0$ , находящаяся на траектории предельного цикла, является неподвижной точкой отображения  $\Psi(\cdot)$ , т.е. выполнено равенство  $x_0 = \Psi(x_0)$ .

Введем  $\rho(x)$  – расстояние вдоль линии  $\mathcal{L}$  от начальной точки  $O$  этой кривой до точки  $x$ . Обозначим  $g \triangleq \rho(x')$ ,  $h \triangleq \rho(x'')$ . Используя точечное отображение, получаем функцию последования  $h = \varphi(g)$ . Очевидно, что если  $g_0 \triangleq \rho(x_0)$ , то неподвижная точка, принадлежащая предельному циклу, находится из решения уравнения

$$g_0 = \varphi(g_0). \quad (11.1)$$

Графически решение этого уравнения можно представить как отыскание точек пересечения биссектрисы координатной плоскости  $(g, h)$  с функцией последования  $h = \varphi(g)$ . Изучение поведения функции последования в точках пересечения дает возможность определить устойчивость соответствующего предельного цикла. Если  $0 < \left. \frac{d\varphi(g)}{dg} \right|_{g=g_0} < 1$ , то имеется устойчивый предельный цикл (автоколебания); если  $\left. \frac{d\varphi(g)}{dg} \right|_{g=g_0} > 1$ , то предельный цикл неустойчив (более подробные сведения приведены в [79]). Наибольшую сложность в использовании метода точечных отображений вызывает определение функции последования.

Пример использования метода точечных отображений для исследования генератора колебаний рассмотрен в п. 11.3.4. с. 256.

В последнее время появились публикации, в которых метод точечных отображений используется для исследования хаотических процессов, см. [72] и п. 13.3.

### 11.2.3. Условия существования предельных циклов для систем второго порядка

В рамках метода фазовой плоскости получены следующие результаты, имеющие важное значение при исследовании наличия предельных циклов у систем второго порядка [94]. К ним, в первую очередь, относятся *теоремы Пуанкаре–Бендиксона*.

**Теорема 1 (А. Пуанкаре).** Для произвольной замкнутой области фазовой плоскости <sup>2</sup> разница между числом находящихся внутри нее особых точек типа "узел", "центр", "фокус"  $N$  и особых точек типа "седло"  $S$  равна 1, т.е. *индекс Пуанкаре*  $I_P \triangleq N - S = 1$ .

**Теорема 2 (первая теорема И. Бендиксона).** Если для системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

функции  $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$  имеют частные производные по  $x_1, x_2$ , то предельный цикл не существует в той области  $\mathcal{P}$  фазовой плоскости, где  $\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$  не равна нулю или не изменяет знака.

**Теорема 3 (вторая теорема Бендиксона).** Если траектория автономной системы второго порядка находится внутри ограниченной области  $\mathcal{P}$  и при этом не стремится к положению равновесия, то эта траектория является либо устойчивым предельным циклом, либо стремится к нему.

**Теорема 4 (А. Пуанкаре).** Замкнутая траектория  $\mathcal{G}$  автономной системы второго порядка является устойчивым <sup>3</sup> предельным циклом, если  $\int_{\mathcal{G}} \left( \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) dt < 0$ .

### 11.3. Метод гармонической линеаризации (гармонического баланса)

Метод *гармонической линеаризации* (по другой терминологии – *гармонического баланса*) относится к приближенным аналитическим методам исследования нелинейных систем. Этот метод имеет давнюю историю. Он восходит к работам Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова (1934), Л.С.Гольдфарба (1957), Р.Коченбургера (1950), Е.П.Попова (1960). Метод широко используется в инженерной практике, применяется в теоретических исследованиях и продолжает развиваться.

Метод гармонической линеаризации предназначен прежде всего для исследования периодических (автоколебательных)

<sup>2</sup> В том числе и предельного цикла.

<sup>3</sup> Точнее – орбитально асимптотически устойчивым, см. с. 264.

процессов в нелинейных системах, однако известно применение метода и для исследования колебательных переходных процессов, а также для решения более широкого круга задач [15, 76, 84, 94, 113].

### 11.3.1. Основные положения. "Свойство фильтра"

Рассмотрим замкнутую нелинейную систему с одним нелинейным блоком, уравнения которой имеют вид (см. также п. 10.7)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-\xi(t)), \quad \sigma(t) = Cx(t), \\ \xi(t) &= \varphi(\sigma(t)).\end{aligned}$$

Здесь  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния линейной части системы;  $\sigma(t) \in \mathcal{R}$  – выход линейной части системы;  $\xi(t) \in \mathcal{R}$  – поступающий на вход линейной части выход нелинейной части со статической характеристикой  $\varphi(\cdot)$ .<sup>4</sup> Первое из уравнений (11.2) задает *линейную часть* системы. Ему соответствует передаточная функция

$$W_{\text{л}}(s) = C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B \triangleq \frac{B(s)}{A(s)} \quad (11.2)$$

от входа  $(-\xi)$  к выходу  $\sigma$ .

Используя операторную форму записи<sup>5</sup> с оператором дифференцирования  $p \triangleq \frac{d}{dt}$ , уравнения (11.2) можем переписать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p)\sigma(t) &= -\mathcal{B}(p)\xi(t), \\ \xi(t) &= \varphi(\sigma(t)),\end{aligned} \quad (11.3)$$

в котором коэффициенты операторных многочленов  $\mathcal{A}(p)$ ,  $\mathcal{B}(p)$  совпадают с коэффициентами многочленов  $A(s)$ ,  $B(s)$  передаточной функции (11.2).

Пусть в системе (11.3) имеет место периодический процесс с некоторой частотой  $\Omega$  (и периодом  $T = 2\pi/\Omega$ ). Нас

<sup>4</sup> Знак "минус" при входном процессе в первом уравнении взят для того, чтобы сохранить традиционное для классической теории линейных систем правило знаков в главной обратной связи системы.

<sup>5</sup> Заметим, что такая форма записи является, по существу, компактной записью дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, полученного из (11.2).

прежде всего будет интересоваться определением характеристик этого процесса (амплитуды и частоты), а также анализ его устойчивости. Итак, полагаем, что  $\sigma(t) \equiv \sigma(t + T)$ . Тогда и  $\xi(t) \equiv \xi(t + T)$ .

Основное допущение, принятое в методе гармонической линеаризации, так называемая *гипотеза (свойство) фильтра*, состоит в том, что для амплитудно-частотной характеристики линейной части системы  $H(\omega) \triangleq |W_{\text{л}}(j\omega)|$  выполнено неравенство

$$H(\Omega) \gg H(k\Omega), \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (11.4)$$

т.е. коэффициент передачи линейной части системы на *основной* частоте значительно превосходит коэффициент передачи для *высших* частот.<sup>6</sup>

Дальнейший план действий состоит в следующем. Предполагая гипотезу фильтра выполненной, заметим, что можно пренебречь составляющими процесса на выходе линейной части с высшими частотами  $2\Omega, 3\Omega, \dots$  (ввиду малости для них коэффициента передачи) и считать, что на выходе линейной части имеется гармонический сигнал с частотой  $\Omega$ . На выходе нелинейной части системы конечно появятся составляющие с высшими частотами (не высказываются предположений о фильтрующих свойствах нелинейного звена). Но из-за того что высшие гармоники не вызывают существенной реакции на выходе линейной части системы, можно не учитывать их влияния на динамику замкнутой системы. Следовательно, при исследовании замкнутой системы (11.2) можно приближенно считать, что как вход, так и выход нелинейного звена являются гармоническими колебаниями,<sup>7</sup> благодаря чему и выполняется (гармоническая) линеаризация нелинейности.

---

<sup>6</sup> Как видно, данное свойство формулируется в нечетких терминах. Кроме того, для его проверки следует знать основную частоту, которая еще подлежит определению. Поэтому можно считать свойство фильтра а priori выполненным, а затем проводить анализ  $H(\omega)$  для найденной основной частоты, см. также [113].

<sup>7</sup> Возможно, что эти колебания несимметричны и содержат постоянную составляющую. Метод гармонической линеаризации применяется и для исследования таких процессов [15, 76, 94, 113], однако для простоты изложения мы здесь считаем колебания симметричными.

### 11.3.2. Коэффициенты гармонической линеаризации

Согласно сделанному выше предположению, как на входе, так и на выходе нелинейного звена имеются гармонические процессы одинаковой частоты  $\Omega$ . Какой вывод можно сделать относительно свойств этого звена?

Рассмотрим следующие примеры.

**Пример 1.** Пусть  $\sigma(t) = A \sin \Omega t$  – гармонический процесс с амплитудой  $A \neq 0$  и частотой  $\Omega$ . Предположим, что выходной процесс данного звена есть тоже гармоника частоты  $\Omega$ , совпадающая по фазе со входным процессом, но имеющая амплитуду  $A_1$ , т.е.  $\xi(t) = A_1 \sin \Omega t$ .

Из первого выражения находим, что  $\sin \Omega t = \frac{\sigma(t)}{A}$ . Подставляя это выражение в формулу для  $\xi(t)$ , получим

$$\xi(t) = \frac{A_1}{A} \sigma(t) = q \sigma(t), \text{ где } q \triangleq \frac{A_1}{A} \text{ – некоторый коэффициент.}$$

Таким образом, при сделанном предположении, рассматриваемое звено ведет себя как линейное безынерционное звено  $\xi(t) = q \sigma(t)$  с коэффициентом передачи  $q$ . Такое звено можно описать передаточной функцией  $W_n(s) = q$ .

**З а м е ч а н и е .** Полученный результат не позволяет сделать вывод о том, что данное звено является линейным и безынерционным, так как не рассмотрены произвольные входные процессы. Утверждается лишь, что по отношению ко входному гармоническому входному процессу с данными частотой и амплитудой рассматриваемое звено ведет себя как линейное.

Высказанному допущению о возможности учитывать только основную гармонику не противоречит зависимость отношения амплитуд  $A_1$  и  $A$  и, следовательно, также коэффициента передачи  $q$  от амплитуды или от частоты входного процесса:  $q = q(A)$ ,  $q = q(A, \Omega)$ . Соответственно получим  $W_n(s, A) = q(A)$ ,  $W_n(s, A, \Omega) = q(A, \Omega)$  – передаточные функции гармонически линеаризованных звеньев зависят от  $A$  (или от  $A$  и  $\Omega$ ), как от параметра. В такой зависимости и проявляется принципиальное отличие характеристик линейных звеньев от нелинейных.

**Пример 2.** Пусть теперь при том же входном процессе  $\sigma(t) = A \sin \Omega t$  выходной процесс имеет фазовый сдвиг, т.е.  $\xi(t) = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t$ . Дифференцируя выражения для  $\sigma(t)$

по  $t$  и предполагая, что  $A \neq 0$ ,  $\Omega \neq 0$ , получим выражение для  $\cos \Omega t$  через  $\dot{\sigma}(t)$ :  $\cos \Omega t = \frac{1}{A\Omega} \dot{\sigma}(t)$ . Подставляя его в формулу для  $\xi(t)$  и с учетом найденного в примере 1 выражения для  $\sin \Omega t$  получим  $\xi(t) = \frac{A_1}{A} \sigma(t) + \frac{B_1}{A} \frac{1}{\Omega} \dot{\sigma}(t)$ . Обозначив  $q \triangleq \frac{A_1}{A}$ ,  $q' \triangleq \frac{B_1}{A}$ , перепишем выражение для  $\xi(t)$  в виде

$$\xi(t) = q\sigma(t) + \frac{q'}{\Omega} \dot{\sigma}(t).$$

Как и в предыдущем примере, коэффициенты  $q$ ,  $q'$ , называемые *коэффициентами гармонической линейаризации* нелинейных звеньев, могут зависеть от амплитуды и частоты входного процесса:  $q = q(A)$ ,  $q' = q'(A)$ , или  $q = q(A, \Omega)$ ,  $q' = q'(A, \Omega)$ . Полученному выражению соответствует передаточная функция звена форсирующего типа:  $W_n(s, A, \Omega) = q(A) + \frac{q'(A)}{\Omega} s$ .<sup>8</sup>

Рассмотрим теперь "технику" вычисления коэффициентов гармонической линейаризации. Пусть по-прежнему  $\sigma(t) = A \sin \Omega t$ . Представим периодический выходной процесс  $\xi(t)$  в виде ряда Фурье [15, 66, 76, 94]:

$$\begin{aligned} \xi(t) \equiv \varphi(\sigma(t)) \equiv \varphi(A \sin \Omega t) &= A_0 + A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t + \\ &+ A_2 \sin(2\Omega t) + B_2 \cos(2\Omega t) + \dots \end{aligned}$$

Согласно принятой гипотезе, ограничимся слагаемыми с частотой не выше частоты основной гармоники, т.е. примем  $\xi(t) \approx A_0 + A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t$ , где *коэффициенты разложения Фурье* определяются выражениями [66]

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) d\psi, \\ A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \quad (11.5)$$

Подстановкой полученных значений в выражения для  $q(A)$ ,

<sup>8</sup> Для звеньев с пассивной гистерезисной характеристикой  $q'(A) < 0$ , поэтому линейаризованное звено, как правило, неминимально-фазовое.

$q'(A)$  найдем, что

$$q(A, \Omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (11.6)$$

$$q'(A, \Omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (11.7)$$

Вычисления по приведенным формулам достаточно просты, и для многих типовых нелинейных звеньев выполняются аналитически. Например, для релейного звена с характеристикой  $\varphi(\sigma) = c \operatorname{sign}(\sigma)$  получается  $q(A) = \frac{4c}{\pi A}$ ,  $q'(A) = 0$ .

Обратим внимание на то, что в данном методе в виде ряда представляется не нелинейная зависимость (как при обычной линеаризации по Тейлору), а процесс (функция от времени), что позволяет учесть специфические автоколебательные свойства нелинейных систем.

Заметим, что при симметричных колебаниях и нечетной однозначной статической нелинейности  $\varphi(\cdot)$ , как видно из (11.7)  $q' = 0$ , что упрощает дальнейший анализ.

Отметим также, что коэффициенты гармонической линеаризации можно получить и при наличии постоянной (медленно меняющейся) составляющей на выходе линейной части системы:  $\sigma(t) = \sigma_0 + A \sin \Omega t$ . Это позволяет исследовать несимметричные колебания и влияние внешнего воздействия на систему (более подробные сведения приведены, например, в [94, 113]).

Обратимся теперь непосредственно к исследованию замкнутой системы (11.2).

### 11.3.3. Уравнение гармонического баланса

Рассмотрим уравнение замкнутой системы (11.2), записанное в виде (11.3). Прежде чем обратиться к исследованию предельных циклов в нелинейной (линеаризованной) системе, повторим приведенные в п. 1.6.1. с. 46, рассуждения о реакции линейной системы на гармоническое входное воздействие применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть линейная стационарная система описывается дифференциальным уравнением, которое для компактности записи представим в операторной форме (см.(11.3)):

$$\mathcal{A}(p)\sigma(t) = -\mathcal{B}(p)\xi(t).$$

Найдем частное решение этого уравнения при  $\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$  для некоторого постоянного  $\lambda \in \mathcal{C}$ . Это решение будем искать в виде  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda t}$ . Подстановкой выражений для  $\xi(t)$ ,  $\sigma(t)$  в данное уравнение получим, что если имеет место нерезонансный случай, т.е.  $A(\lambda) \neq 0$ , где  $A(s)$  – многочлен от переменной  $s \in \mathcal{C}$ , коэффициенты которого совпадают с соответствующими коэффициентами операторного многочлена  $A(p)$ , функция  $\sigma(t)$  указанного вида является решением, причем  $\sigma_0 = -\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}\xi_0$ . Окончательно, искомое решение имеет вид  $\sigma(t) = -W_{\pi}(\lambda)\xi(t)$ , где  $W_{\pi}(\lambda) = W_{\pi}(s)|_{s=\lambda}$ ,  $W_{\pi}(s)$  – передаточная функция, соответствующая уравнению (11.3) (см. (11.2) и п. 1.6.). Положим теперь  $\lambda = j\Omega$ . Тогда  $\sigma(t) = -W(j\Omega)\xi(t)$ ,  $W_{\pi}(j\Omega)$  – частотная передаточная функция рассматриваемой системы. Полученное выражение дает возможность найти реакцию на гармоническое входное воздействие в нерезонансном случае. Действительно, представив процесс  $\xi(t) = \xi_0 \cos \Omega t$  как  $\xi(t) = \frac{\xi_0}{2}(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})$ , используя свойство суперпозиции, получим

$$\sigma(t) = -\frac{\xi_0}{2}(W_{\pi}(j\Omega)e^{j\Omega t} + W_{\pi}(-j\Omega)e^{-j\Omega t}).$$

Представив теперь  $W_{\pi}(j\Omega) = H(\Omega)e^{j\psi(\Omega)}$ , где  $H(\Omega) = \text{abs}(W_{\pi}(j\Omega))$  – амплитудночастотная, а  $\psi(\Omega) \triangleq \arg(W_{\pi}(j\Omega))$  – фазочастотная характеристики линейной части системы, получим

$$\sigma(t) = -\frac{\xi_0}{2}H(\Omega)(e^{j(\Omega t + \psi(\Omega))} + e^{-j(\Omega t + \psi(\Omega))}) = -\xi_0 H(\Omega) \cos(\Omega t + \psi(\Omega)).$$

Рассмотрим теперь замкнутую систему с линейной обратной связью, полагая  $\xi(t) = q\sigma(t)$ . Полагая по-прежнему, что  $\xi(t) = \xi_0 e^{j\Omega t}$ ,  $\xi_0 \neq 0$ , получим систему уравнений

$$\sigma(t) = -W(j\Omega)\xi(t),$$

$$\xi(t) = q\sigma(t).$$

Подстановкой выражения для  $\xi(t)$  из первого уравнения во второе находим, что данные уравнения будут совместны для всех  $t$ , если справедливо выражение

$$qW_{\pi}(j\Omega) = -1, \tag{11.8}$$

которое является уравнением гармонического баланса для линейных систем. Итак, для существования незатухающих

колебаний в автономной линейной системе с передаточной функцией  $W_{\pi}(s)$ , замкнутой отрицательной обратной связью с коэффициентом  $q$  необходимо, чтобы при некотором значении  $\omega = \Omega$  амплитудно-фазовая характеристика "линейной части" системы  $W_{\pi}(j\omega)$  проходила на комплексной плоскости через точку  $(-q, 0)$ .<sup>9</sup> Заметим, что выражение (11.8) не позволяет определить амплитуды колебаний  $\xi_0, \sigma_0$  (так как условие баланса (11.8) не содержит этих величин). В этом проявляется отмеченное для линейных систем отсутствие изолированных замкнутых траекторий и, следовательно – автоколебаний. Разные начальные условия в таких системах приводят к разным амплитудам колебаний.

Обратимся теперь непосредственно к задаче исследования периодических режимов в нелинейной системе, предполагая, что вместо нелинейного звена взяты линеаризованные уравнения, полученные рассмотренным в предыдущем параграфе методом. Итак, будем считать, что система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p)\sigma(t) &= -\mathcal{B}(p)\xi(t), \\ \xi(t) &= q(A, \Omega)\sigma(t) + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega}\dot{\sigma}(t), \end{aligned} \quad (11.9)$$

в котором коэффициенты гармонической линеаризации  $q(A, \Omega), q'(A, \Omega)$  определяются соотношениями (11.6), (11.7). Пусть опять ищется решение в предположении, что  $\xi(t) = \xi_0 e^{j\Omega t}$ . Из первого уравнения получаем  $\sigma(t) = \xi_0 W_{\pi}(j\Omega) e^{j\Omega t}$ , тогда

$$\dot{\sigma}(t) = -j\Omega \xi_0 W_{\pi}(j\Omega) e^{j\Omega t}.$$

Имеем цепочку равенств

$$\xi(t) = q(A, \Omega)\sigma(t) + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega}\dot{\sigma}(t) = \xi_0 e^{j\Omega t} W_{\pi}(j\Omega) (q(A, \Omega) + jq'(A, \Omega)).$$

Как и выше, учитывая что  $\xi(t) = \xi_0 e^{j\Omega t}$ , получаем следующее уравнение гармонического баланса для нелинейной (линеаризованной) системы:

$$(q(A, \Omega) + jq'(A, \Omega)) W_{\pi}(j\Omega) = -1. \quad (11.10)$$

---

<sup>9</sup> Полученный результат полностью соответствует известному критерию устойчивости Найквиста линейных систем [15, 66, 76]. Заметим, что здесь не обсуждался вопрос об устойчивости замкнутой системы. Найденные условия есть необходимые условия существования незатухающих колебаний. В системе также имеются переходные составляющие, которые могут быть и расходящимися.

Найденное выражение является основным соотношением метода гармонической линеаризации и служит для определения параметров колебаний нелинейной системы. Важно отметить, что в условии гармонического баланса (11.10) входит и амплитуда колебаний.<sup>10</sup> Следовательно, оно нарушается при изменении амплитуды. Таким образом, метод гармонической линеаризации позволяет учесть возможность существования предельных циклов у нелинейных систем.

Уравнение (11.10) записано в комплексных величинах. Ему соответствует система из двух уравнений с вещественными коэффициентами. В этой системе имеются две неизвестные величины – параметры  $A$  и  $\Omega$ . Следующим шагом использования метода является разрешение (11.10) относительно указанных переменных.

Уравнение (11.10) записывают в разной форме [15, 76, 94, 113].

Например, можно представить его в виде соотношения между многочленами в числителе и знаменателе передаточной функции линейной части. Тогда оно принимает вид

$$A(j\Omega) + ((q(A, \Omega) + jq'(A, \Omega))B(j\Omega) = 0 \quad (11.11)$$

Если определить *характеристический многочлен* замкнутой системы как  $D(s) \triangleq A(s) + (q(A, \Omega) + s \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega})B(s)$ , то (11.11) соответствует прохождению амплитудно-фазовой характеристики многочлена  $D(s)$ <sup>11</sup> через начало координат,  $D(j\Omega) = 0$ .

В некоторых случаях удобнее рассматривать (11.10) как равенство двух параметрически заданных функций  $W_n(j\omega)$  и

$\frac{1}{q(a, \omega) + jq'(a, \omega)}$ . Такой способ удобен, когда коэффициенты гармонической линеаризации не зависят явно от частоты. В этом случае строятся две параметрические кривые –

<sup>10</sup> Заметим, что, поскольку при выводе коэффициентов гармонической линеаризации использовалась амплитуда  $A$  процесса на выходе линейной части системы, то именно она определяется уравнением (11.10). Для определения амплитуд колебаний в других точках (например, на выходе системы, который может не совпадать с выходом ее линейной части), следует учитывать частотные характеристики промежуточных звеньев.

<sup>11</sup> Амплитудно-фазовой характеристикой многочлена  $D(s)$  (кривой Михайлова) называется годограф функции  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  [15, 76, 80].

годограф линейной части системы от параметра  $\omega$  и годограф функции  $\frac{1}{q(a) + jq'(a)}$  – от параметра  $a$ . Точки их пересечения отвечают уравнению гармонического баланса. В этих точках определяются  $\Omega = \omega$  – по первой кривой и  $A = a$  – по второй кривой.

Следующим шагом является анализ устойчивости периодического режима. Данный анализ без строгого обоснования выполняется в рамках рассматриваемого метода с использованием отмеченных интерпретаций уравнения гармонического баланса с помощью критериев устойчивости линейных систем (амплитудно-фазового критерия Эрмита–Михайлова, критериев Найквиста, Гурвица). Достаточно подробные сведения приведены в литературе (см., например, [15, 66, 76, 94, 113]).

#### 11.3.4. Пример. Исследование генератора колебаний

Рассмотрим упрощенную модель генератора незатухающих колебаний [79, 94]. Модель представляет собой колебательное звено с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1}$ , замкнутое положительной обратной связью по скорости через релейный элемент  $u = c \operatorname{sign} \dot{x}$  (рис. 11.1). Обратимся вна-

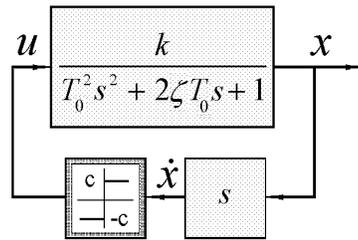


Рис. 11.1. Структурная схема генератора колебаний.

чае к описанному в п. 11.2.2. методу точечных отображений.

Для исследования системы используем каноническую форму фазовой переменной (см. с. 74), в которой переменные состояния связаны как функция и производная:

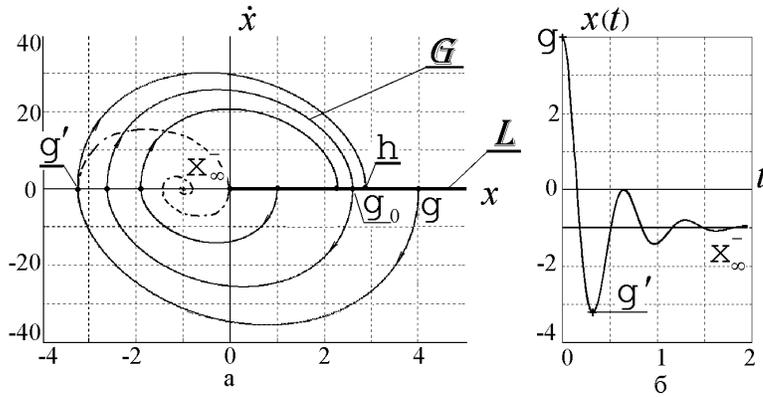


Рис. 11.2. Точечное отображение (а) и переходная характеристика колебательного звена (б).

$x_1(t) \triangleq x(t), x_2(t) \triangleq \dot{x}(t)$ . Предполагая наличие в системе предельного цикла  $G$ , получим функцию последования. Для этого проведем из начала координат в сторону положительных значений  $x$  луч  $L$  (рис. 11.2,а, а также рис. 10.2,б на с. 234). Выберем начальную точку  $x' \in L$ . Требуется получить координаты точки  $x'' \in L$ , в которой происходит следующее пересечение траектории и линии  $L$ . В выбранном базисе точкам на луче  $L$  соответствуют нулевые значения  $\dot{x}$ , в верхней полуплоскости  $\dot{x} > 0$ , следовательно  $u = c$ ; в нижней полуплоскости  $\dot{x} < 0$  и  $u = -c$ . Поэтому чтобы получить функцию последования надо рассмотреть переходную характеристику колебательного звена при начальных условиях  $x(0) = g, \dot{x}(0) = 0$  и  $x(0) = g', \dot{x}(0) = 0$  (рис. 11.2,б). Как известно [15, 76], эта характеристика стремится к установившемуся значению  $x_\infty \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = ku$ , где  $k$  – коэффициент передачи,  $u$  – величина входного воздействия (в рассматриваемом случае  $u = \pm c$ , поэтому  $x_\infty^- = -ck, x_\infty^+ = ck$ ). Если известно перерегулирование  $\sigma$ ,<sup>12</sup> то, как нетрудно убедиться, при произвольном  $x(0)$  и  $\dot{x}(0) = 0$  выполнено  $\max_t x(t) = x_\infty + \sigma(x_\infty - x(0))$ . Применяя эту формулу дважды (при  $x_\infty = -ck, x(0) = g$  и  $x_\infty = ck, x(0) = g'$ ),

<sup>12</sup> При нулевых начальных условиях перерегулирование  $\sigma$  определяется как  $\sigma \triangleq \frac{\max_t x(t) - x_\infty}{x_\infty}$ .

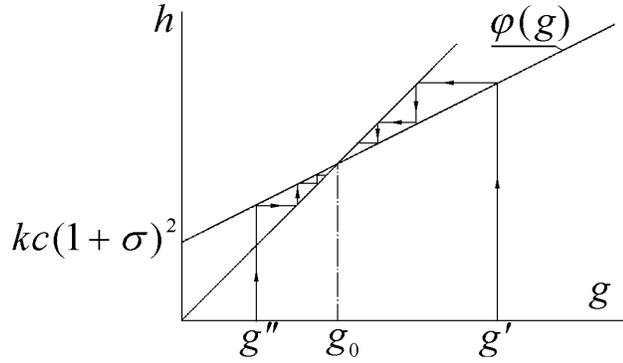


Рис. 11.3. Функция последования  $h = \varphi(g)$ .

находим  $g' = -(1 + ck) - \sigma g$ ,  $h = ck + \sigma(ck - g') = ck(1 + \sigma)^2 + \sigma^2 g$ . Следовательно, функция последования  $\varphi(g)$  в рассматриваемом примере линейная и имеет  $\varphi(g) = ck(1 + \sigma)^2 + \sigma^2 g$ . Для определения амплитуды предельного цикла следует решить уравнение  $g_0 = \varphi(g_0)$ , что приводит к формуле

$$g_0 = ck \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}. \quad (11.12)$$

У устойчивых колебательных звеньев параметр  $0 < \sigma < 1$ , поэтому формула (11.12) приводит к конечным положительным значениям амплитуды колебаний на выходе системы (очевидно, что для предельного цикла  $A_x \triangleq \max_t x(t) \equiv g_0$ ). Граничным является случай  $\sigma = 1$ , соответствующий консервативному звену ( $\zeta = 0$ ). При этом положительная обратная связь с ограниченным по уровню сигналом приводит к неограниченному росту "амплитуды" выходного процесса. Графически это явление представляется отсутствием пересечения функции последования  $\varphi(g)$  с биссектрисой координатного угла плоскости  $(g, h)$ . Исследование устойчивости периодического режима производится по значению производной  $\left. \frac{d\varphi(g)}{dg} \right|_{g=g_0}$ . В рассматриваемом примере эта производная равна  $0 < \sigma^2 < 1$ , следовательно, в системе устанавливаются автоколебания с амплитудой, определяемой формулой (11.12). Графически сходимость колебаний к предельному циклу из разных начальных значений  $x(0) = g'$  и  $x(0) = g''$  показана на рис. 11.3.

Частоту автоколебаний можно определить исходя из вида весовой функции  $w(t)$  колебательного звена. Так как  $w(t) = \frac{k}{T_0\lambda} \exp\left(-\frac{\zeta}{T_0}t\right) \sin\left(\frac{\lambda}{T_0}t\right)$  ( $t \geq 0$ ), где  $\lambda = \sqrt{1-\zeta^2}$  [15, 76], то точки пересечения предельного цикла с линией  $\mathcal{L}$  отстоят во времени на  $\frac{2\pi T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ . Поэтому частота автоколебаний  $\Omega$  связана с параметрами  $T_0, \zeta$  звена  $W(s)$  соотношением  $\Omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T_0}$ .

Рассмотрим теперь решение той же задачи методом гармонического баланса. Выходом линейной части системы является сигнал  $\sigma(t) \equiv \dot{x}(t)$ . Линейная часть описывается передаточной функцией  $W_n(s) = \frac{ks}{T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1}$  от входа  $\xi(t) \equiv u(t)$  к выходу  $\sigma(t)$ . Следует учесть, что в рассматриваемом примере обратная связь положительная (рис. 11.1), поэтому уравнение гармонического баланса (11.10) записывается с противоположным знаком в правой части:  $(q(A, \Omega) + jq'(A, \Omega))W_n(j\Omega) = 1$ . Уравнение нелинейной части системы имеет вид  $\xi(t) = c \operatorname{sign}\sigma(t)$ . Для релейного звена  $q(A) = \frac{4c}{\pi A}$ . Получаем следующее уравнение:

$$\frac{4ckj\Omega}{\pi A(-T_0^2\Omega^2 + 2\zeta T_0j\Omega + 1)} = 1.$$

Отсюда находим параметры предельного цикла  $\Omega = \frac{1}{T_0}$ ,

$A = \frac{2ck}{\pi\zeta T_0}$ . Поскольку выходом линейной части системы здесь является производная от выхода колебательного звена, для вычисления  $A_x$  следует найденную амплитуду  $A$  разделить на значение АЧХ дифференцирующего звена на частоте  $\omega = \Omega$ . Итак, по методу гармонического баланса получаем

$$\Omega = \frac{1}{T_0}, \quad A_x = \frac{2ck}{\pi\zeta}. \quad (11.13)$$

Интересно сравнить полученный результат с точной формулой (11.12). Для этого следует установить связь между *относительным коэффициентом демпфирования*  $\zeta$  колебательного звена и перерегулированием  $\sigma$ . Исходя из аналитического выражения для переходной функции [15, 76], нетрудно получить, что  $\sigma = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$ . Используя эту зависимость, найдем абсолютную  $\Delta A \triangleq A_x^r - A_x$  и относительную

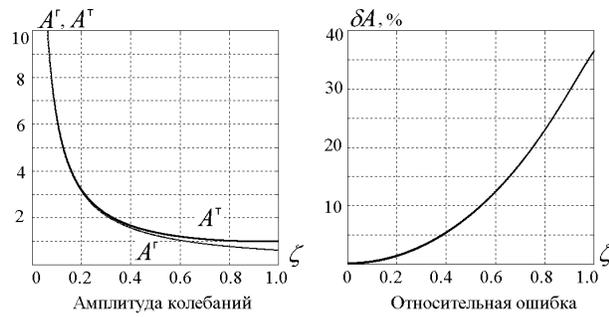


Рис. 11.4. Амплитуда колебаний генератора и ошибка ее определения методом гармонического баланса.

$\delta A \triangleq \frac{|\Delta A|}{A_x^t}$  ошибки ( $A_x^t$  вычисляется по формуле (11.12),  $A_x^r$  – по формуле (11.13)). Результаты отражены на рис. 11.4, где показаны графики относительных (к величине коэффициента передачи  $sk$ ) амплитуд колебаний  $A_x^t$  и  $A_x^r$ , а также график относительной ошибки формулы (11.13) в зависимости от параметра  $\zeta$ . Из графиков видно, что при  $\zeta < 0.5$  относительная ошибка не превышает 10%, что является вполне удовлетворительной точностью определения характеристик системы с учетом погрешностей, неизбежно имеющих в ее математической модели [72, 87]. Заметим, что относительная ошибка определения частоты колебаний  $\Omega$  несколько больше. Как следует из точной и приближенной формул, при  $\zeta = 0.5$  эта ошибка составляет около 15%, а при  $\zeta = 0.6$  она равна 25%.

Рассмотренный пример показывает, что метод гармонического баланса может служить достаточно надежным способом определения параметров предельных циклов, однако полученные с его помощью результаты нуждаются в проверке (см. сноску 6 на с. 249). Если вернуться к рассмотренному примеру, то отношение амплитудно-частотных характеристик линейной части системы на частотах  $\Omega = \frac{1}{T_0}$  и  $2\Omega$  составляет при  $\zeta = 0.2$  величину 3.9, при  $\zeta = 0.5$  – 1.8, при  $\zeta = 1.0$  – 1.25. Следовательно, гипотезу фильтра при  $\zeta$ , близкой к единице, нельзя считать выполненной.

## 11.4. Метод функций Ляпунова

*Метод функций А.М.Ляпунова (прямой, или второй метод Ляпунова)* относится к точным аналитическим методам. Он является фундаментом теории нелинейных систем. Основы этого метода заложены А.М. Ляпуновым в 90-х годах XIX столетия. Имеется большое число публикаций по развитию результатов Ляпунова и еще большее – по применению метода Ляпунова в различных областях теории систем управления. Здесь ограничимся краткими сведениями об основных идеях данного метода (подробнее см. в [64]).

### 11.4.1. Основные определения

Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (11.14)$$

полагая, что  $f(0) = 0$ . Тогда точка  $x = 0$  является особой точкой – состоянием равновесия системы. Этому начальному состоянию соответствует тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ , которое называется *невозмущенным движением* (11.14). При  $x_0 \neq 0$  получаем *возмущенное движение*. Ставится задача исследования устойчивости положения равновесия. На содержательном уровне она означает определение характера поведения возмущенного решения: будет ли оно при возрастании  $t$  приближаться к состоянию равновесия или удаляться от него. Прежде чем дать точные формулировки, рассмотрим более общую задачу.

Выше принято, что  $f(0) = 0$ . Насколько общим является это условие? Пусть, например, для некоторого  $x^* \neq 0$  выполнено  $f(x^*) = 0$ . Тогда состоянием равновесия является точка  $x^*$ , которой соответствует решение  $x(t) \equiv x^*$ . Чтобы свести задачу к указанной выше, сделаем замену переменных  $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x^*$ . Тогда  $\Delta x_0 = x_0 - x^*$ ,  $x(t) = \Delta x(t) + x^*$ ,  $\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t)$ . Отсюда получаем уравнение  $\Delta \dot{x}(t) = \tilde{f}(\Delta x(t))$ , где функция  $\tilde{f}(\Delta x(t)) \triangleq f(\Delta x + x^*(t))$  удовлетворяет условию  $\tilde{f}(0) = 0$ . Поэтому получаем задачу исследования устойчивости тривиального решения  $\Delta x(t) \equiv 0$ .

Аналогично, если требуется исследовать устойчивость движения по некоторой траектории  $x^*(t)$ , являющейся решением

неоднородного (в общем случае) уравнения  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ,  $x(0) = x_0^*$ , после замены переменных и подстановки  $\Delta x_0 = x_0 - x^*$ ,  $x(t) = \Delta x(t) + x^*$ ,  $\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)$ , приходим к уравнению в отклонениях  $\Delta \dot{x}(t) = \tilde{f}(\Delta x(t), t)$ , в котором функция  $\tilde{f}(0, t) = 0$  для всех  $t$ .

Следовательно, рассмотренные задачи сводятся к исследованию невозмущенного движения уравнения (11.14) либо более общего неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad f(0, t) = 0.$$

Приведем некоторые определения [12, 66, 76, 94].

**Определение 1.** Положение равновесия *устойчиво* (по Ляпунову) при  $t \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для всех  $\|x_0\| < \delta$  справедливо неравенство  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ .  $\square$

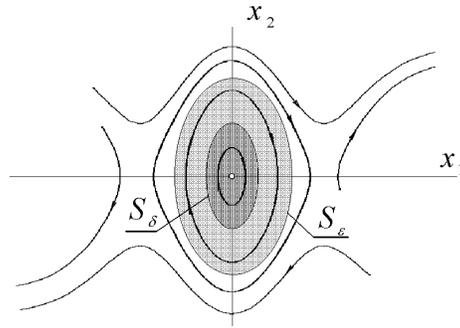


Рис. 11.5. Устойчивость по Ляпунову.

Если через  $\mathcal{S}_\rho$  обозначить область  $\|x\| < \rho$ , то данное определение означает, что любая траектория, начинающаяся в  $\mathcal{S}_\delta$ , не достигнет  $\mathcal{S}_\varepsilon$ .

**З а м е ч а н и е 1 .** В приведенном определении  $\mathcal{S}_\delta, \mathcal{S}_\varepsilon$  — сферические области (в заданной нормой  $\|\cdot\|$  метрике). Их можно считать произвольными замкнутыми ограниченными областями  $\mathcal{S}_\delta \subset \mathcal{S}_\varepsilon, \mathcal{S}_\delta \neq \{0\}$  (рис. 11.5).

**З а м е ч а н и е 2 .** Фактически такой вид устойчивости означает непрерывную зависимость решений от начальных условий, равномерную по  $t$  [12, 79].

**З а м е ч а н и е 3 .** Про устойчивость по Ляпунову иногда говорят, что это "устойчивость в малом". Область

$\mathcal{S}_\delta$ , обеспечивающая заданные ограниченные отклонения от состояния равновесия, может иметь малые размеры. Важно, что она ненулевая. В качестве примера, можно рассмотреть "обращенный маятник" с сухим трением. Имеется конечная (пусть небольшая) область начальных состояний, в котором его вертикальное положение устойчиво.

**З а м е ч а н и е 4 .** Положение равновесия устойчивых линейных систем устойчиво по Ляпунову. Положение равновесия и предельный цикл автоколебательных нелинейных систем, вообще говоря, неустойчивы по Ляпунову.

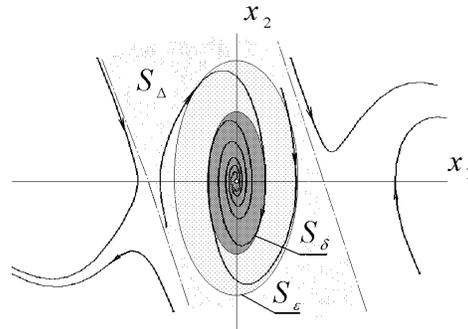


Рис. 11.6. Асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

**Определение 2.** Положение равновесия *асимптотически устойчиво*, если: 1) оно устойчиво по Ляпунову; 2) существует  $\Delta > 0$  такое, что для любого  $\|x_0\| < \Delta$  выполнено  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  (рис. 11.6).

Область  $\mathcal{S}_\Delta$  называется *областью притяжения*, или *областью асимптотической устойчивости*, а точка  $x_0 = 0$  – *притягивающей* (в  $\mathcal{S}_\Delta$ ).  $\square$

**Определение 3.** Положение равновесия *асимптотически устойчиво в целом* (глобально асимптотически устойчиво), если в условиях Определения 2,  $\mathcal{S}_\Delta = \mathcal{X}$  – все пространство состояний.  $\square$

**Определение 4.** Положение равновесия *неустойчиво* (по Ляпунову), если для всех  $\delta > 0$  найдется  $x_0 \in \mathcal{S}_\delta$ , такое, что соответствующее решение за конечное время достигнет границ области  $\mathcal{S}_\varepsilon$  (рис. 11.7).  $\square$

Заметим, что асимптотически устойчивые линейные систе-

мы глобально асимптотически устойчивы. Также отметим, что, хотя у линейной системы, фазовый портрет которой имеет вид узла, имеются асимптотически стремящиеся к состоянию равновесия траектории, такая система неустойчива по Ляпунову.

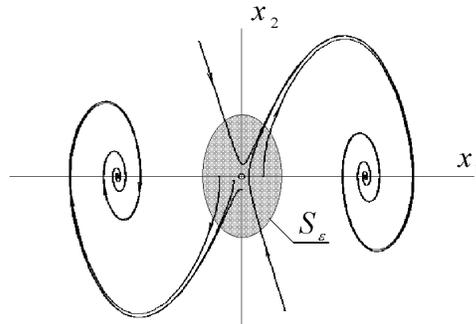


Рис. 11.7. Неустойчивость по Ляпунову.

#### 11.4.2. Устойчивость множеств и частичная устойчивость

Для расширения класса рассматриваемых задач используются и другие определения устойчивости. Многие из них связаны с переходом от устойчивости точки или конкретной траектории к устойчивости множеств.

Например, для исследования автоколебательных систем и движущихся по замкнутым траекториям объектов, вводится понятие *орбитальной устойчивости*. Для него используется расстояние  $\rho(x, \mathcal{G})$  между точкой  $x$  и множеством  $\mathcal{G}$ , определяемое, как  $\rho(x, \mathcal{G}) \triangleq \inf_{x_z \in \mathcal{G}} \|x - x_z\|$ .

**Определение 5.** Траектория  $\mathcal{G}$  *орбитально устойчива*, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x_0$  таких, что  $\rho(x_0, \mathcal{G}) < \delta$ , справедливо неравенство  $\rho(x(t), \mathcal{G}) < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ .  $\square$

Аналогично, можно дать и определения асимптотической орбитальной устойчивости, глобальной асимптотической орбитальной устойчивости и т.д. В данном определении рассматривается близость решения к процессу, как к некоторому множеству точек. Поэтому расстояния между точками возмущенного и невозмущенного движений в каждый данный

момент времени могут оказаться большими, но траектории остаются близкими (рис. 11.8).

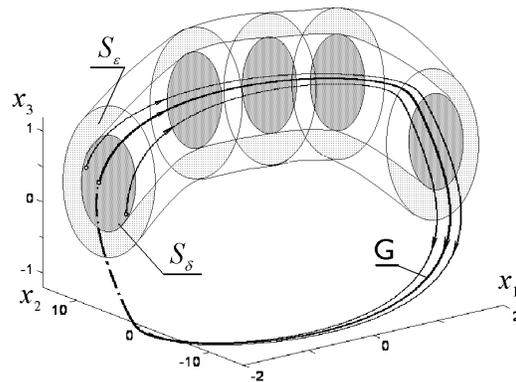


Рис. 11.8. Орбитальная асимптотическая устойчивость.

Будем предполагать, что решения уравнения (11.14) определены на бесконечном интервале времени  $0 \leq t < +\infty$ . Траектории, продолженные на весь этот интервал, называются *целыми траекториями*. Заметим, что движение изображающей точки, начинающееся в положении равновесия, или на замкнутой траектории, будет оставаться там для всех моментов времени. Соответствующие множества точек образуют инвариантные множества в пространстве состояний [34, 94].

**Определение 6.** *Инвариантным множеством  $\mathcal{M}$*  называется множество  $\{x\}$  точек таких, что из  $x(t_0) \in \mathcal{M}$  для некоторого  $t_0$  следует, что  $x(t) \in \mathcal{M}$  для всех  $-\infty < t < +\infty$ .

Если это множество включает все возможные значения  $x(t_0)$ , для которых выполнено указанное условие, то оно называется *наибольшим инвариантным множеством*.  $\square$

Имеется следующее определение устойчивости инвариантного множества, обобщающее понятия орбитальной устойчивости и устойчивости положения равновесия [28, 86].

**Определение 7.** Инвариантное множество  $\mathcal{M}$  устойчиво (относительно системы (11.14)), если для всех  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x_0$  таких, что  $\rho(x_0, \mathcal{M}) < \delta$  выполнено  $\rho(x, \mathcal{M}) < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ .  $\square$

Аналогично дается и определение асимптотической устойчивости инвариантного множества.

Устойчивость множеств относится к классу свойств *частичной устойчивости* систем. Другим подобным свойством является *устойчивость по отношению к функции*. Рассмотрим систему с выходом

$$\dot{x} = f(x), \quad (11.15)$$

$$\xi = h(x), \quad (11.16)$$

где  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $\xi \in \mathcal{R}^{n_u}$ ,  $n_u \leq n$ ,  $f(x)$  и  $h(x)$  – непрерывные вектор-функции. Пусть система (11.15) имеет равновесие  $x = x^*$  (общий случай сводится к этому заменой координат и рассмотрением уравнений возмущенного движения).

**Определение 8.** Решение  $x = x^*$  системы (11.15) называется *устойчивым по отношению к функции  $h(x)$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для всех начальных значений  $x_0$ , удовлетворяющих условию  $|x_0 - x^*| < \delta$  решение  $x(t)$  с начальным условием  $x(0) = x_0$  определено при всех  $t \geq 0$  и выполняется неравенство

$$|h(x(t)) - h(x^*)| < \varepsilon \quad \text{для всех } t \geq 0. \quad (11.17)$$

Если решение  $x = x^*$  устойчиво по отношению к  $h(x)$  и, кроме того, выполняется *условие аттрактивности*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t)) = h(x^*), \quad (11.18)$$

то решение  $x^*$  называется *асимптотически устойчивым по отношению к функции  $h(x)$* .

Если решение  $x = x^*$  устойчиво по отношению к функции  $h(x)$ , все решения системы (11.15) определены при всех  $t \geq 0$  и условие аттрактивности (11.18) выполняется для любых начальных условий  $x_0$ , то решение  $x = x^*$  (и система (11.15)) называется *глобально асимптотически устойчивой по отношению к функции  $h(x)$* .

Очевидно, при  $n_u = n$  и  $h(x) = x$  определение 8 совпадает со стандартными определениями устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Сам А.М. Ляпунов занимался исследованиями именно этого частного случая. В 1957 г. В.В. Румянцев сформулировал критерии устойчивости по отношению к части переменных, соответствующей случаю  $x = \text{col}\{y, z\}$ ,  $h(x) = y$ . Подробнее о свойствах и условиях частичной устойчивости см. в [28, 29, 64, 86]. Отметим,

что устойчивость по отношению к функции  $h(x)$  не сводится к устойчивости множества  $\{x: h(x) = h(x^*)\}$ , как показывает следующий пример.

**Пример.** Рассмотрим систему 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{2x_2}{1+x_1^2} \end{cases} \quad (11.19)$$

При начальных условиях  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = a$  система имеет решение

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = \frac{a(1 + e^{-2t})}{2}. \quad (11.20)$$

Рассмотрим функцию выхода

$$h(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{1 + x_1^2}$$

и вычислим скорость ее изменения вдоль решений системы:

$$\dot{h}(x_1, x_2) = -\frac{4x_2^2}{1 + x_1^2} + \frac{x_2^2 x_1^2}{(1 + x_1^2)^2} = -4h(x_1, x_2) \left(1 - \frac{x_1^2}{4(1 + x_1^2)}\right).$$

Следовательно,  $-4h \leq \dot{h} \leq -3h \leq 0$  и, значит,  $h(x_1(t)x_2(t)) \rightarrow 0$  и  $\dot{h}(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Однако, никакое решение (11.19) с начальным условием  $x_2(0) = a \neq 0$  не стремится к множеству  $S = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2): x_2 = 0\}$ . Это легко видно из (11.20).  $\square$

При исследовании систем, подверженных ограниченными возмущениям, оказываются полезными следующие два определения [34, 64].

**Определение 9.** Система называется *устойчивой по Лагранжу*, если каждое ее решение неограниченно продолжаемо вправо, т.е. имеет смысл при  $0 \leq t \leq \infty$  и все фазовые траектории ограничены на  $[0, \infty)$  (рис. 11.9).  $\square$

**Определение 10.** Система называется *предельно ограниченной (диссипативной по Левинсону)*, если существуют области  $\mathcal{S}_\Delta$ ,  $\mathcal{S}_\delta$  такие, что  $\mathcal{S}_\Delta \subset \mathcal{S}_\delta$  и для всех  $x_0 \in \mathcal{S}_\Delta$  существует момент времени  $t^* < \infty$  (возможно, зависящий от  $x_0$ ), что при всех  $t \geq t^*$  выполнено  $x_0 \in \mathcal{S}_\delta$ .  $\square$

В данном определении  $\mathcal{S}_\Delta$  называют иногда *областью диссипации*, а  $\mathcal{S}_\delta$  – *предельным множеством*.

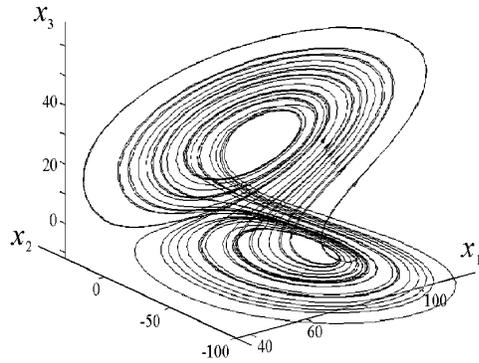


Рис. 11.9. Устойчивость по Лагранжу.

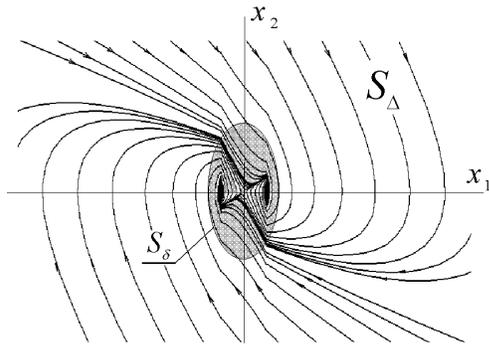


Рис. 11.10. Диссипативность в целом.

Если  $\mathcal{S}_\Delta$  – все пространство, то система называется *предельно ограниченной в целом* (рис. 11.10).

Данные определения являются наиболее распространенными, хотя представляют собой малую часть определений устойчивости, используемых в теории систем.

### 11.4.3. Функции Ляпунова

Перейдем теперь непосредственно к изложению основных идей и некоторых результатов метода функций Ляпунова.

Начнем рассмотрение со следующего примера.

Рассмотрим систему первого порядка,  $n = 1$ , уравнение

которой имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad f(0) = 0. \quad (11.21)$$

Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет дополнительному условию  $xf(x) < 0$  при  $x \neq 0$ , т.е. ее график лежит целиком во втором и четвертом квадрантах, причем  $f(x) = 0$  только в точке  $x = 0$ . Другой информации о виде этой функции нет. Требуется исследовать устойчивость состояния равновесия системы (11.21).

Введем вспомогательную функцию  $V(x) \triangleq \frac{1}{2}x^2$ . Заметим, что  $V(0) = 0$  и  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Значения  $x = x(t)$  меняются в соответствии с уравнением (11.21). Следовательно, в силу этого уравнения будут также изменяться и значения функции  $V(x) = V(x(t))$ . Найдем производную этой функции по времени в силу уравнения (11.21). По правилу дифференцирования сложной функции получаем  $\dot{V}(x) = x(t)\dot{x}(t) = xf(x)$ , т.е. для каждого момента времени значение  $V(x)$  определяется в каждой точке пространства состояний по координатам этой точки и значению функции  $f(x)$ . Поэтому для нахождения  $\dot{V}(x)$  не требуется получать решения (11.21).

Далее заметим, что при всех  $x \neq 0$  выполнено  $\dot{V}(x) < 0$ , значит, функция  $V(t)$  монотонно убывает, стремясь при  $t \rightarrow \infty$  к нулю. Следовательно, величина  $|x(t)|$  также будет монотонно убывать (что следует из вида функции  $V(x)$ ) и  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому можно сделать вывод, что система (11.21) асимптотически устойчива в целом.<sup>13</sup> Следует обратить внимание на то, что вывод об устойчивости состояния равновесия получен без решения уравнения (11.21), более того, — при самых общих предположениях о виде функции  $f(x)$ .

Данный пример относился к системе первого порядка. Излагаемые ниже теоремы *ляпуновского типа* применимы для произвольного  $n$ .

Рассмотренная в данном примере функция является представителем *функций Ляпунова*. Имеется несколько определений этих функций. Поэтому уместно обратиться к разъяснению, данному самим А.М. Ляпуновым в его основополагающем труде 1892 г. [60].

---

<sup>13</sup> Мы здесь описываем схему использования метода Ляпунова. Доказательства приведенных положений содержатся, например, в [12, 34, 79, 97].

”К другому [методу] мы причислим все те, которые основываются на принципах, не зависящих от разыскания каких-либо решений дифференциальных уравнений возмущенного движения. ... ; и вообще в основании всех тех из них, с которыми встретимся далее, всегда будет лежать разыскание функций переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$  по некоторым данным условиям, которым должны удовлетворять их полные производные по  $t$ , составленные в предположении, что  $x_1, x_2, \dots, x_n$  суть функции  $t$ , удовлетворяющие уравнениям.”

Сам А.М. Ляпунов применял разработанный им метод к задачам исследования устойчивости систем. Однако во второй половине XX в. выяснилось, что этот подход с успехом работает и для анализа качества систем, устойчивости множеств, колебательности и других динамических свойств нелинейных систем, а также для решения задач синтеза. Это привело к пониманию метода функций Ляпунова как ведущего метода исследования нелинейных систем.

В данной главе мы рассмотрим лишь основные теоремы метода функций Ляпунова, а также типичные примеры их применения для анализа устойчивости систем.

#### 11.4.4. Устойчивость непрерывных систем

Будем рассматривать функции  $V(x)$ , удовлетворяющие следующим требованиям: 1)  $V(x)$  непрерывна и непрерывно-дифференцируема по  $x$  в некоторой области  $\Omega \subset \mathcal{X}$ , содержащей начало координат; 2)  $V(x)$  обращается в ноль в начале координат:  $V(0) = 0$ ; 3)  $V(x)$  положительно определена, т.е. положительна всюду, кроме начала координат:  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ .  $\square$

Функция  $W(x)$  называется отрицательно определенной, если  $-W(x)$  положительно определена.

Если неотрицательная функция может обращаться в ноль не только при  $x = 0$ , то она называется неотрицательно определенной (знакоположительной).

Для формулировки дальнейших результатов понадобится производная по времени функции Ляпунова в силу системы (10.12) (уравнения которой при  $n = 1$  совпадают с (11.14)).

Используя правило дифференцирования сложной функции и операцию вычисления производной скалярной функции по

векторному аргументу получим <sup>14</sup>

$$\dot{V}(x) = \nabla_x V(x) f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x). \quad (11.22)$$

Приведем теперь формулировки некоторых теорем.

**Теорема 1.** Об устойчивости (А.М. Ляпунов).

Если при  $x \in \Omega$  существует положительно-определенная функция  $V(x)$  такая, что ее производная в силу системы (10.12) знакоотрицательна, то состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

**Теорема 2.** Об асимптотической устойчивости (А.М. Ляпунов).

Если при  $x \in \Omega$  существует положительно-определенная функция  $V(x)$  такая, что ее производная в силу системы (10.12) отрицательно определена, то состояние равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову.

**Теорема 3.** Об асимптотической устойчивости в области  $S_\Delta$  (асимптотической устойчивости "в большом") [93, 94].

Если при выполнении условий теоремы 2 для некоторого  $C > 0$  неравенство  $V(x) \leq C$  выполнено в замкнутой окрестности начала координат  $S_\Delta$ ,  $\{0\} \in S_\Delta$ , то состояние равновесия  $\{0\}$  асимптотически устойчиво с областью притяжения  $S_\Delta$  (см. определение 2, с. 263).

**Теорема 4.** Об асимптотической устойчивости в целом (теорема Барбашина–Красовского).

Если в условиях Теоремы 2 множество  $\Omega$  совпадает со всем пространством, т.е.  $\Omega = \mathcal{X}$ , а  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ , то система асимптотически устойчива в целом.

Функция Ляпунова, удовлетворяющая приведенному в данной теореме условию роста, иногда называется *радиально неограниченной* [64, 93]. Про функцию  $V(x, t)$ , зависящую яв-

---

<sup>14</sup> Полезно иметь в виду следующие правила дифференцирования [23]: производная скалярной функции  $V(x)$  по вектору  $x \in \mathcal{R}^n$  является  $1 \times n$ -матрицей частных производных (т.е. транспонированной к вектор-столбцу градиента  $V$  по  $x$ ):  $\frac{\partial V}{\partial x_i} \triangleq (\nabla_x V(x))^T$ ; производная вектор-функции  $f(x) \in \mathcal{R}^m$  по вектору  $x \in \mathcal{R}^n$  является  $m \times n$ -матрицей, элементами которой являются частные производные  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ; производная скалярной функции  $V$  по  $m \times n$ -матрице  $A = \{a_{ij}\}$  является  $m \times n$ -матрицей, элементами которой являются частные производные  $\frac{\partial V}{\partial a_{ij}}$ ; производная квадратичной формы  $x^T H x$  по вектору  $x \in \mathcal{R}^n$  равна  $2x^T H \equiv x^T H + H x^T$ .

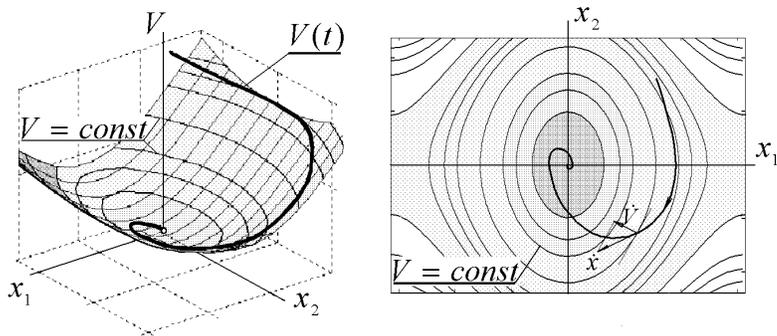


Рис. 11.11. Функция Ляпунова асимптотически устойчивой системы.

но от времени и удовлетворяющую для всех  $t$  неравенству  $V(x, t) > W(x)$ , где  $W(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ , говорят, что она допускает бесконечно большой нижний предел.

**Теорема 5.** О неустойчивости (А.М.Ляпунов).

Если  $\dot{V}(x)$  положительно определенная функция и сколь угодно близко от начала координат есть точки, где  $V(x) > 0$ , то начало координат неустойчиво по Ляпунову.

Заметим также, что устойчивость по Лагранжу имеет место, если  $\dot{V}(x) \leq 0$  и  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ , а предельная ограниченность в целом – если  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$  и  $\dot{V}(x) < 0$  при всех  $x \notin \mathcal{S}_\delta$ .

Приведенные условия имеют достаточно наглядную геометрическую интерпретацию. Согласно выражению (11.22), значение  $\dot{V}$  представляет собой скалярное произведение градиента функции  $V$  на вектор фазовой скорости в данной точке. Поэтому  $\dot{V}(x)$  есть скорость прохождения изображающей точки по нормали к линиям равного уровня функции  $V(x)$  (рис. 11.11). Если вследствие отрицательной определенности функции  $\dot{V}$  движение по всем траекториям (в области  $S_\Delta$ ) направлено внутрь поверхностей  $V = \text{const}$ , то состояние равновесия устойчиво асимптотически.

Знакоотрицательность, или отрицательная определенность, функции  $\dot{V}(x)$ , согласно (11.22), может быть выражена уравнением в частных производных

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = -Q(x), \quad (11.23)$$

где  $Q(x)$  – некоторая знакоположительная или положительно определенная функция. Уравнение (11.23) часто называют, аналогично соответствующему матричному уравнению, *уравнением Ляпунова* [93]. В более общем случае, когда функции  $V(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  зависят явно от времени,  $V = V(x, t)$ ,  $f = f(x, t)$  получается *дифференциальное уравнение Ляпунова*

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) = -Q(x, t). \quad (11.24)$$

Эти уравнения находят различные применения в теории систем (см. [3, 23, 47, 73, 93], а также с. 209).

Использование приведенного выше (с. 265, п. 6) понятие инвариантного множества позволяет обобщить метод функций Ляпунова и расширить область его применения [94, 174]. Прежде всего это относится к возможности определения предельных циклов и анализа их устойчивости а также к доказательству асимптотической устойчивости если не удастся показать, что  $\dot{V}(x)$  является отрицательно определенной (а не только знакоотрицательной).

Для этого заметим, что из неравенства  $\dot{V}(x) \leq 0$ , выполненного для всех  $x$ , принадлежащих некоторой ограниченной области  $\Omega_C$ , следует, что в области  $\Omega_C$  функция  $V(x(t))$  не может возрастать (а только убывать или оставаться постоянной). Отсюда следует, что при ограниченной снизу функции  $V(x)$  точки, в которых  $\dot{V}(x) < 0$  не могут служить предельными точками для решений системы. Следовательно, представляют интерес точки, в которых  $\dot{V}(x) = 0$ . Этот путь рассуждений отражен следующей теоремой [54].

**Теорема 6.** О сходимости к множеству (Ла-Салль).

Пусть  $V(x)$  – скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по  $x$ , и область  $\Omega_C$  определяется как  $\Omega_C = \{x : V(x) < C\}$ . Пусть  $\Omega_C$  ограничена и  $\Omega \subseteq \Omega_C$  есть множество точек, для которых  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Пусть также  $\mathcal{M} \subseteq \Omega$  есть наибольшее инвариантное множество в  $\omega$ . Тогда с ростом  $t$  каждое решение  $\Omega_C$  стремится к  $\mathcal{M}$ .

Можно заметить, что теорема 3 об асимптотической устойчивости вытекает из данной как частный случай при  $\Omega = \{0\}$ , но теорема 6 позволяет получить и дополнительные результаты (см. 11.4.6.).

При исследовании устойчивости используется понятие  $\omega$ -предельного множества  $\Gamma^+$  решения  $x(t)$  уравнения (11.21),

как множества точек, к которым это решение стремится при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $x(t)$  ограничено, то оно при  $t \rightarrow \infty$  всегда стремится к  $\Gamma^+$ . Известно, что если  $x(t)$  ограничено (для всех  $t \geq 0$ ), то его  $\omega$ -предельное множество  $\Gamma^+$  непусто, компактно и является инвариантным множеством.<sup>15</sup>

Основной проблемой при использовании данного метода является выбор подходящей функции Ляпунова: если функция данного вида "не подходит", то это еще не означает неустойчивости системы – возможно, другой выбор функции Ляпунова позволит доказать устойчивость (или неустойчивость) системы. Хотя общего аналитического метода построения функций Ляпунова не существует, для их конструирования имеются некоторые рекомендации [66, 76, 93, 94].

Часто функции Ляпунова берут в виде *квадратичных форм*, т.е. выражений вида

$$V(x) = x^T H x,$$

где матрица  $H$  симметрична и положительно определена (в смысле положительной определенности полученной функции),  $H = H^T > 0$ . Такие функции удовлетворяют сформулированным выше (пп. 1-3 на с. 270) требованиям и, кроме того, *условию роста*  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ , что важно при доказательстве глобальной устойчивости.

Для проверки положительной определенности матрицы  $H = H^T$  можно использовать *критерий Сильвестра*, согласно которому (аналогично критерию Гурвица) требуется положительность главных угловых миноров матрицы  $H$ . Известно также, что матрица  $H$  положительно определена, если все ее собственные числа положительны.

Если рассматриваемая система линейная,  $f(x, t) = A(t)x$ , и функция Ляпунова выбрана в виде некоторой квадратичной формы  $V(x, t) = x^T H(t)x$ , то уравнение Ляпунова (11.24) принимает вид

$$\dot{H}(t) + A(t)^T H(t) + H(t)A(t) = -Q(t), \quad (11.25)$$

---

<sup>15</sup> Множество  $M$ , лежащее в пространстве  $\mathcal{R}^n$  *компактно*, если оно *замкнуто* (содержит все свои предельные точки) и ограничено. Для целей данной книги это свойство компактных множеств можно рассматривать в качестве определения.

где  $Q(t) = Q(t)^T \geq 0$  ( $> 0$ ) – некоторая симметричная матрица.<sup>16</sup> В стационарном случае,  $V = V(x)$ ,  $A(t) \equiv A$ ,  $Q(t) \equiv Q$ , представляет интерес установившееся решение (11.25), которое находится из уравнения

$$A^T H + HA = -Q. \quad (11.26)$$

Уравнения (11.25), (11.26) называются *матричными (дифференциальным и алгебраическим) уравнениями Ляпунова*. Как известно из теории матриц [53], существование единственной положительно определенной матрицы  $H$ , являющейся решением (11.26), эквивалентно гурвицевости (устойчивости) матрицы  $A$ . Более подробно [3, 30], если матрица  $A$  - гурвицева, то уравнение (11.26) относительно  $n \times n$ -матрицы  $H = H^T$  имеет решение и притом – единственное которое выражается формулой

$$H = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt.$$

Если  $Q = Q^T \geq 0$ , то  $H = H^T \geq 0$  и нуль-пространство матрицы  $H$  инвариантно относительно  $A$ : из  $Hx_0 = 0$  следует  $HAx_0 = 0$ .

Изучение устойчивости линейных стационарных систем через построение функций Ляпунова не представляет практического интереса, но, как отмечено выше, уравнения Ляпунова находят применение при решении многих задач теории управления. В Приложении С. на с. 432 описано обращение к процедуре **lyap** пакета MATLAB, служащей для численного решения уравнения (11.26).

Для механических, электрических и других систем, не содержащих вносящих дополнительную энергию элементов (такие системы называются *пассивными*), в качестве функции Ляпунова целесообразно использовать полную энергию (см. пример в п. 11.4.6.).

Если в рассматриваемой системе реализуется движение в направлении градиента некоторой целевой функции [8, 36, 78, 93] (такие системы называются *градиентными*), то целесообразно в качестве функции Ляпунова брать саму целевую функцию.

---

<sup>16</sup> Используются правила дифференцирования, приведенные в сноске 14 на с. 271.

Если система содержит (одну) скалярную нелинейность  $\varphi(\sigma)$  (рис. 10.1, с. 230), функцию Ляпунова удобно брать в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности", предложенном А.И. Лурье т.е.

$$V(x) = x^T Hx + \vartheta \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma, \quad \vartheta \in \mathcal{R}$$

– так называемая "функция Ляпунова-Лурье"

Для систем с  $k$  нелинейностями аналогично используется функция

$$V(x) = x^T Hx + \sum_{j=1}^k \vartheta_j \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(\sigma_j) d\sigma_j, \quad \vartheta_j \in \mathcal{R}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Подробнее использование функций этого типа рассмотрено в [56].

Находит также применение аппарат *векторных функций Ляпунова* [90, 93]. Эти функции получаются как набор отдельных функций, построенных для подсистем, из которых состоит рассматриваемая система.

#### 11.4.5. Устойчивость дискретных систем

Рассмотрим вкратце некоторые подходы и результаты применения метода Ляпунова для исследования дискретных систем [36, 78, 110, 174]. Основные идеи совпадают с теми, которые изложены выше для систем непрерывного времени.

Пусть стационарная дискретная система описывается нелинейным разностным уравнением

$$x[k+1] = f(x[k]), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.27)$$

Предполагаем, что точка  $x = 0$  есть состояние равновесия системы (11.27), т.е.  $f(0) = 0$  и  $x[k] \equiv 0$  есть тривиальное решение (11.27). Как и для непрерывных систем, при исследовании устойчивости некоторого другого состояния равновесия  $x^*$  (т.е. такого состояния, для которого выполнено  $x^* = f(x^*)$ ), можно перейти к исследованию устойчивости нулевого состояния через *уравнения в отклонениях*, которые получаются из (11.27) относительно отклонения  $\Delta x[k] \triangleq x[k] - x^*$ .

Как и выше (с. 270), введем положительно определенную функцию  $V(x)$ . Приведем некоторые теоремы ляпуновского типа для дискретного случая [110].

**Теорема 1.** Об устойчивости систем дискретного времени.

Если существует положительно определенная функция  $V(x)$  такая, что в силу системы (11.27) при всех  $x \in \Omega$  выполнено

$$\Delta V(x) \leq 0 \quad (< 0 \text{ при } x \neq 0), \quad (11.28)$$

то состояние равновесия устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

**Теорема 2.** Об устойчивости в целом дискретных систем. Если функция  $V(x)$  асимптотически устойчивой системы удовлетворяет условию роста  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то состояние равновесия асимптотически устойчиво в целом.

Формулировка теоремы об инвариантных множествах для дискретного случая, как и теорем 1, 2, получается из формулировок соответствующих теорем для непрерывных систем заменой условия  $\dot{V} \leq 0$  на  $\Delta V(x) \leq 0$ .

Рассмотрим применение метода Ляпунова к линейным дискретным системам. Пусть система описывается линейным разностным уравнением

$$x[k+1] = Ax[k], \quad x[0] = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.29)$$

Введем функцию Ляпунова  $V(x) = x^T H x$ ,  $H = H^T > 0$ . Вычислим  $\Delta V(x) \triangleq V(f(x)) - V(x)$  в силу системы (11.29). Так как  $f(x) = Ax$ , получим

$$\Delta V(x) = (Ax)^T H Ax - x^T H x = x^T (A^T H A - H)x.$$

Асимптотическая устойчивость системы обеспечивается отрицательной определенностью полученной квадратичной формы; другими словами – существованием положительно определенного решения  $H = H^T > 0$  алгебраического уравнения Ляпунова для дискретных систем

$$A^T H A - H = -G, \quad G = G^T > 0. \quad (11.30)$$

Как и в непрерывном случае, этот результат не имеет самостоятельного значения для исследования устойчивости линейных систем, но уравнение (11.30) находит применение в

других задачах [47, 73]. В Приложении С. (на с. 427) приведено обращение к MATLAB-программе **dlyap** для решения (11.30).

Кроме прямого метода Ляпунова, для исследования устойчивости дискретных систем используются и несколько иные подходы. К ним относится применение *принципа сжимающих отображений* и теоремы о  *неявной функции* [78].

Напомним, что отображение  $f = f(x), x \in \mathcal{R}^n, f \in \mathcal{R}^n$  называется *сжимающим*, если  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, L < 1$ .

<sup>17</sup>

Принцип сжимающих отображений [78] гласит, что если  $f$  – сжимающее отображение, то оно имеет единственную *неподвижную точку*  $x^*$  (т.е. такую, что  $x^* = f(x^*)$ , см. также с. 246), к которой сходится процесс (11.27) при любом  $x_0$  со скоростью геометрической прогрессии

$$\|x[k] - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L^k} \|f(x_0) - x_0\|.$$

Заметим, что здесь не утверждается необходимость выполнения указанного условия для устойчивости системы (11.27). Например, устойчивость линейной системы (11.29) не обязательно вытекает из данного принципа [78].

Теорема о неявной функции служит для анализа устойчивости неявных дискретных моделей [72, 78] (см. также п. 6.10.2. с. 161).

В заключение заметим, что прямой метод Ляпунова весьма плодотворен, но из-за сложности выбора функций Ляпунова остается, в основном, инструментом теоретиков, позволяющим получить общие сведения о поведении систем разных классов.

Рассмотренные ниже в п. 11.5. методы теории абсолютной устойчивости иллюстрируют возможности применения метода Ляпунова для получения инженерных критериев устойчивости [30, 83, 94].

Более подробно применение функций Ляпунова к синтезу нелинейных и адаптивных систем рассмотрено в книге [64].

---

<sup>17</sup> Другими словами, если функция  $f$  удовлетворяет глобальному условию Липшица (см. (10.14) на с. 237) с константой  $L < 1$ .

#### 11.4.6. Примеры

**Пример 1. Собственные движения маятника.** Рассмотрим уравнения математического маятника массой  $m$  и длиной  $l$  (см. также с. 23). Учтем влияние момента сил сопротивления, вызванного "вязким" трением. Полагаем, что этот момент пропорционален величине угловой скорости. Угол отклонения маятника от вертикальной оси  $\varphi(t)$  подчиняется уравнению  $J\ddot{\varphi}(t) + \rho\dot{\varphi}(t) + mgl \sin \varphi(t) = 0$ , в котором  $J = ml^2$  – момент инерции маятника;  $\rho \geq 0$  – коэффициент трения (считаем, что  $\varphi = 0$  соответствует положению "вертикально вниз"). После деления на  $J$  запишем это уравнение в виде

$$\ddot{\varphi}(t) + \varrho\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \sin \varphi(t) = 0, \quad (11.31)$$

где параметр  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Полная энергия  $H$  маятника включает кинетическую и потенциальную составляющие и определяется выражением

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = J\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (11.32)$$

Введем вектор состояния  $x \triangleq \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}\}$  и перепишем уравнение (11.31) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 \sin x_1(t) - \varrho x_2(t). \end{cases} \quad (11.33)$$

Зададимся функцией Ляпунова  $V(x)$ , пропорциональной  $H(\varphi, \dot{\varphi})$ , а именно, положим  $V(x) = \frac{\dot{x}_2^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos x_1)$  ( $x \triangleq \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ ). Как нетрудно убедиться, данная функция удовлетворяет перечисленным на с. 270 условиям положительной определенности за исключением п. 3, так как  $H(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$  на множестве точек с координатами  $\varphi = \pm 2k\pi, \dot{\varphi} = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), а не только в начале координат. Поэтому ограничимся в дальнейшем областью  $\Omega \triangleq \{x : |\varphi| \leq \pi, V(x) < 2\omega_0^2\}$ . Границей данной области является кривая с координатами  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , при которых полная энергия маятника  $H_\Omega$  равна наибольшему значению ее потенциальной составляющей,  $H_\Omega = \max_\varphi (mgl(1 - \cos \varphi)) = 2mgl$ . Эта линия выражается формулой  $x_2 = \omega_0 \sqrt{2(\cos x_1 + 1)}$ . Очевидно, что  $\Omega$  является ограниченной окрестностью начала координат, внутри которой функция  $V(x)$  обращается в ноль только при  $x = 0$ .

Вычислим производную  $\dot{V}(x(t))$  в силу системы (11.33). В соответствии с формулой (11.22), с. 271, получим

$$\dot{V}(x) = -\varrho x_2^2. \quad (11.34)$$

Поскольку выполнено неравенство  $\dot{V}(x) \leq 0$  при  $x \in \Omega$ , то согласно теореме 1 (с. 271) положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим теперь отдельно случаи  $\varrho = 0$  (*демпфирование отсутствует*) и  $\varrho > 0$  (*демпфирование есть*).

При  $\varrho = 0$  из (11.34) следует, что  $\dot{V}(x) \equiv 0$ , т.е. функция Ляпунова остается неизменной. Так как выбранная функция  $V(x)$  пропорциональна полной энергии системы, то полученное выражение означает, что энергия маятника при отсутствии трения постоянна, т.е. рассматриваемая система является *консервативной*. Из равенства  $V(x) = C$  для некоторого заданного  $0 < C < H_\Omega$  следует, что фазовые траектории удовлетворяют уравнению

$$x_2^2 - 2\omega_0^2 \cos x_1 = 2(C - \omega_0^2). \quad (11.35)$$

Заметим, что это же выражение можно получить исходя из (11.33). Действительно, исключая из (11.33) время  $t$ , получим уравнение  $x_2 dx_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 dx_1$ , интегрирование которого дает (11.35).<sup>18</sup> Метод Ляпунова позволяет определить свойства системы без вычисления ее решений или нахождения фазовых траекторий.

Таким образом, исследуя поведение функции  $V(x)$  находим, что для всех  $t$  переменные состояния системы подчиняются уравнению (11.35). В области  $\Omega$  имеется единственное состояние равновесия  $x = 0$ . Оно не удовлетворяет (11.35) при  $C \neq 0$ ; следовательно, движение маятника будет иметь характер незатухающих колебаний с амплитудой, зависящей от начальных условий (от константы  $C$ ). Фазовые траектории (и совпадающие с ними линии равного уровня функции  $V(x)$ ) при  $\varrho = 0$  показаны на рис. 11.5, с. 262.

Рассмотренный пример позволяет также проследить связь между функцией Ляпунова консервативной системы и известным в теории дифференциальных уравнений понятием первых интегралов.

---

<sup>18</sup> См. также с. 122, п. 5.3.1.

Как известно [12, 79], *первым интегралом* уравнения  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathcal{R}^n$  называется функция  $Q(x)$  определенная и непрерывная вместе со своими частными производными в некотором открытом множестве  $\Omega$  (содержащемся в области, где определена и непрерывна вместе со своими частными производными вектор-функция  $f(x)$ ), если при подстановке в  $Q(x)$  произвольного решения, траектория которого расположена целиком во множестве  $\Omega$ , получается постоянная относительно  $t$  величина. Любой первый интеграл удовлетворяет условию [79]  $\frac{\partial Q(x)}{\partial x} f(x) = 0$ . Сопоставляя это условие с формулой (11.22) видим, что если имеется возможность использовать первый интеграл в качестве функции Ляпунова,  $V(x) \triangleq Q(x)$ , то  $\dot{V}(x) \equiv 0$  и система консервативна.

Перейдем теперь к рассмотрению системы с демпфированием,  $\rho \neq 0$ . Заметим, что из (11.34) следует, что  $\dot{V}(x) = 0$  только при  $x_2 = 0$ . Для остальных точек пространства состояний она отрицательна. Следовательно, указанное в теореме 6 множество  $\omega$  является прямой  $x_2 = 0$ . Но в рассматриваемой области нет ни одной целой траектории, для которой  $x_2(t) \equiv 0$ , за исключением начала координат. Поэтому  $\mathcal{M} = \{0\}$ . Согласно утверждению теоремы, при  $t \rightarrow \infty$  каждая траектория стремится к множеству  $\mathcal{M}$ , т.е. к точке  $x = 0$ . Таким образом, доказана асимптотическая устойчивость в большом положении равновесия системы (11.33), несмотря на отсутствие отрицательной определенности функции Ляпунова.

Фазовая траектория и линии равного уровня функции  $V(x)$  показаны на рис. 11.11, с. 272. Поведение функции Ляпунова и ее производной во времени для выбранной фазовой кривой показано на рис. 11.12.

**Пример 2. Возбуждение колебаний маятника.** Обратимся снова к движению маятника, полагая, что на него действует внешний управляющий момент  $M(t)$ . Введем управляющее воздействие  $u(t) \triangleq \frac{M(t)}{J}$ . Пренебрежем силами трения. Тогда, вместо (11.31) получим уравнение

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \sin \varphi(t) = u(t). \quad (11.36)$$

Для полной энергии маятника  $H$  выполнено соотношение (11.32). Рассмотрим задачу возбуждения колебаний маятни-

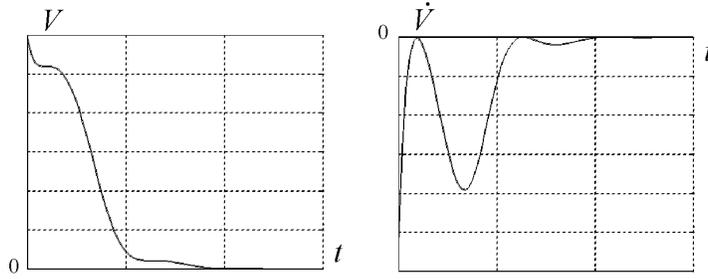


Рис. 11.12. Графики функций  $V(x(t))$  и  $\dot{V}(x(t))$  для одной из реализаций процесса (11.33).

ка, которая сводится к выводу на заданный уровень и стабилизации энергии  $H$  маятника (подробнее см. [6, 64]). Для этой цели можно использовать *пропорциональный*

$$u = -\gamma(H - H^*)\dot{\varphi}(t) \quad (11.37)$$

или *релейный*

$$u = -\gamma \text{sign}((H - H^*)\dot{\varphi}(t)) \quad (11.38)$$

алгоритмы управления [6, 64]. Они являются разновидностями алгоритмов *скоростного градиента*. (Сведения о методе скоростного градиента приведены в Приложении А., п. А. см. выражение (А.15) на с. 410). В выражениях (11.37), (11.38) через  $H^*$  обозначен требуемый уровень энергии, а  $\gamma > 0$  – параметр алгоритма (для (11.37) это коэффициент усиления, а для (11.38) – величина ”полки” реле).

Как и выше, возьмем функцию Ляпунова пропорциональную полной энергии маятника,  $V(x) = \frac{\dot{x}_2^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos x_1)$ , где  $x = \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ , и вычислим ее производную в силу системы. Получим

$$\dot{V} = \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \omega_0^2\dot{\varphi}\sin\varphi = u\dot{\varphi}. \quad (11.39)$$

При использовании пропорционального закона управления (11.37) находим, что

$$\dot{V} = -\gamma(H - H^*)\dot{\varphi}^2, \quad (11.40)$$

а для релейного закона управления (11.38) –

$$\dot{V} = -\gamma \text{sign}(H - H^*) |\dot{\varphi}|. \quad (11.41)$$

Отсюда видно, что при  $H < H^*$  и  $\dot{\varphi} \neq 0$  производная  $\dot{V} > 0$ . Поскольку  $\dot{\varphi}(t) \equiv 0$  совместимо с уравнениями системы только при  $\varphi(t) \equiv 0$ , начало координат ( $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ ) неустойчиво по Ляпунову. Вне этой точки следует рассмотреть множество, определяемое условием  $H = H^*$ . Нетрудно убедиться, что оно является инвариантным множеством, так как при  $u(t) \equiv 0$  и соответствующих начальных условиях (таких, что  $H(\varphi(0), \dot{\varphi}(0)) = H^*$ ) получается траектория, для которой  $H(t) = H^*$  (см. выше уравнение (11.35), с. 280). Так как при  $H > H^*$  имеет место  $V < 0$ , а функция  $V$  – положительно определенная в области  $\Omega \triangleq \{x : V(x) \leq 2\omega_0^2\}$  (см. с. 279), то все траектории, начинающиеся внутри этой области (кроме тривиального решения  $\varphi(t) \equiv 0$ ) будут асимптотически стремиться к предельному циклу, определяемому условием  $H(t) \equiv H^*$ . Следовательно, в системе возбуждаются автоколебания заданной амплитуды.

На рис. 11.13 показана последовательность положений маятника при возбуждении колебаний по знаковому алгоритму (а) и соответствующий фазовый портрет (б).

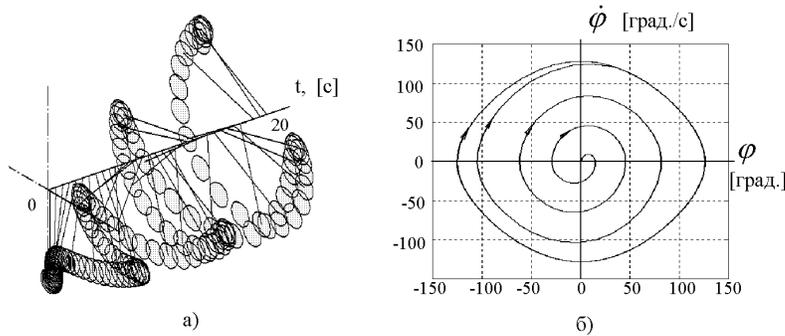


Рис. 11.13. Процесс раскачки маятника.

### Пример 3. Исследование автоколебательной системы.

В данном примере рассмотрим так называемое *уравнение Баттина*: [52]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t) + a^2 x_1(t) - x_1(t)(x_1(t)^2 + x_2(t)^2), \\ \dot{x}_2(t) = \omega x_1(t) + a^2 x_2(t) - x_2(t)(x_1(t)^2 + x_2(t)^2), \end{cases} \quad (11.42)$$

где  $\omega > 0, a > 0$  – параметры. Состояние  $x = 0$  является состоянием равновесия. Исследуем устойчивость этого состояния наличие у системы предельных циклов. Введем квадратичную функцию Ляпунова  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Заметим что условие роста (см. теорему 4, с. 271) для этой функции выполнено. Производная  $\dot{V}(x)$  в силу системы (11.42) определяется выражением  $\dot{V}(x) = (x_1^2 + x_2^2)(a^2 - x_1^2 - x_2^2)$ . Нетрудно заметить, что  $\dot{V}(x) > 0$  при  $\|x\| < a$  и  $x \neq 0$ . Следовательно, состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову. В области  $\|x\| > a$  выполнено  $\dot{V}(x) < 0$ , поэтому система является диссипативной и все траектории, начинающиеся вне области  $\|x\| \leq a$  стремятся к ней. Так как  $\dot{V}(x) = 0$  при  $\|x\| = a$  и в силу того, что решение  $x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = a^2$  удовлетворяет (11.42), то данное решение является асимптотически устойчивым предельным циклом – система (11.42) является автоколебательной.

Для иллюстрации на рис. 11.14 а. показаны графики функций  $V(x), \dot{V}(x)$ , (принято  $a = 1, \omega = \pi$ ) на которых отражены траектории процессов  $V(x(t))$  при начальных условиях  $x_0 = [-0.1, 0]^T$  (расходящиеся колебания) и  $x_0 = [-3, 0]^T$  (затухающие колебания). Соответствующие фазовые траектории приведены на рис. 11.14 б.

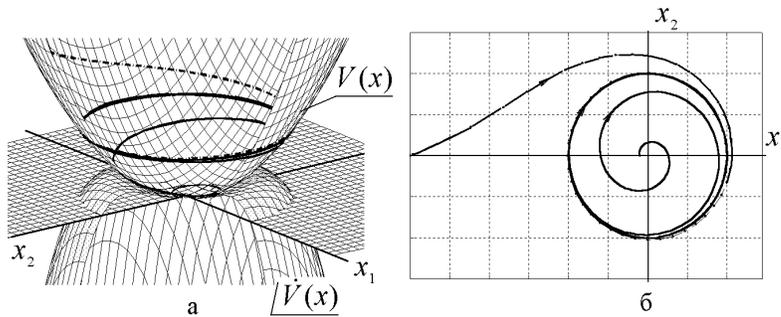


Рис. 11.14. Функция Ляпунова и фазовый портрет автоколебательной системы.

**Пример 4. Преследование зайца.** Рассмотрим погоню собаки за зайцем [174]. Предположим, что заяц движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v_r$ , а гончая - с постоянной по модулю скоростью  $v_h$ , причем вектор скорости в каждый момент времени направлен на зайца (траектория сближения в этом случае представляет собой *трактрису*, или "со-

бачью тропу"). Обозначим через  $x_h, y_h$  и  $x_r, y_r$ , соответственно, координаты гончей и зайца. Тогда  $\dot{x}_r(t) = v_r, \dot{y}_r(t) = 0, y_r(0) = 0$ . Учитывая направление вектора скорости гончей, получим, что для некоторой постоянной  $k > 0$  выполнено

$$\begin{cases} \dot{x}_h(t) = -k(x_h(t) - x_r(t)), \\ \dot{y}_h(t) = -k(y_h(t) - y_r(t)). \end{cases}$$

Постоянную  $k$  определим из очевидного соотношения  $\dot{x}_h(t)^2 + \dot{y}_h(t)^2 = v_h^2$ . Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_h(t) = -\frac{x_h(t) - x_r(t)}{\sqrt{(x_h(t) - x_r(t))^2 + y_h(t)^2}}v_h, \\ \dot{y}_h(t) = -\frac{y_h(t)}{\sqrt{(x_h(t) - x_r(t))^2 + y_h(t)^2}}v_h. \end{cases}$$

В относительных координатах  $x \triangleq x_h - x_r, y \triangleq y_h$  эта система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}v_h - v_r, \\ \dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}v_h. \end{cases} \quad (11.43)$$

Спрашивается, поймает ли собака зайца? В терминах рассматриваемой модели это значит: всякое ли решение с начальным состоянием  $(x_0, y_0)$  стремится к началу координат? Для ответа на поставленный вопрос исследуем устойчивость решений (11.43). Заметим, что уравнения (11.43) не определены в точке  $x = y = 0$  (когда заяц пойман).

Для выбора подходящей функции Ляпунова учтем, что целью преследования является уменьшение расстояния между собакой и зайцем. Именно расстояние и будем использовать в качестве функции Ляпунова:  $V(x, y) \triangleq x^2 + y^2$ . Производная этой функции в силу (11.43) равна  $\dot{V}(x, y) = -2v_h\sqrt{x^2 + y^2} - 2v_r x$ . Видно, что при  $v_h > v_r$  функция  $\dot{V}(x, y) < 0$  во всех точках, кроме начала координат.<sup>19</sup> Следовательно, если гончая бежит быстрее зайца (а заяц – по прямой), то она его поймает (асимптотически).

<sup>19</sup> Действительно, при  $x = 0$  это очевидно, а при  $x \neq 0$  получим  $-v_h\sqrt{x^2 + y^2} - v_r x < -(v_h - v_r)|x| < 0$ .

**Пример 5. Устойчивость нелинейной дискретной системы.** Рассмотрим систему [174]

$$\begin{cases} x_1[k+1] = \frac{x_2[k]}{1+x_2[k]^2}, \\ x_2[k+1] = \frac{x_1[k]}{1+x_2[k]^2}. \end{cases} \quad (11.44)$$

Состояние  $x = 0, x \triangleq \text{col}\{x_1, x_2\}$  является состоянием равновесия (действительно, условие  $x^* = f(x^*)$  при  $x^* = 0$ , очевидно, выполнено). Введем функцию Ляпунова  $V(x) \triangleq x_1^2 + x_2^2$ . Чтобы проверить, убывает ли она вдоль траекторий системы (11.44), вычислим  $V(f(x))$ . Получим

$$V(f(x)) = \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2}{(1+x_2^2)^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1+x_2^2)^2} = \frac{V(x)}{(1+x_2^2)^2}.$$

Отсюда видно, что  $V(f(x)) < V(x)$  при  $x \neq 0$ . Несложно проверить выполнение и других условий теоремы 2 с. 277, следовательно, состояние равновесия  $x = 0$  дискретной системы (11.44) асимптотически устойчиво в целом.

## 11.5. Методы теории абсолютной устойчивости

### 11.5.1. Задача абсолютной устойчивости

Предположим, что нелинейная система представлена в виде системы Лурье: линейной динамической подсистемы и нелинейного статического звена в цепи обратной связи. Для простоты ограничимся случаем системы с одним нелинейным блоком, уравнения которой, следовательно, можно представить в виде (см. 11.3)

$$\mathcal{A}(p)\sigma(t) = -\mathcal{B}(p)\xi(t), \quad (11.45)$$

$$\xi(t) = \varphi(\sigma(t)), \quad (11.46)$$

где  $p \equiv \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования  $\mathcal{A}(p)$ ,  $\mathcal{B}(p)$  – операторные многочлены.

Линейная часть рассматриваемой системы имеет передаточную функцию от входа  $(-\xi)$  к выходу  $\sigma$ :

$$W_{\pi}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (11.47)$$

где аргумент  $s \in \mathcal{C}$ , а многочлены  $B(s)$ ,  $A(s)$  получаются заменой аргумента  $p$  в  $\mathcal{A}(p)$ ,  $\mathcal{B}(p)$  на  $s$ .

Займемся задачей исследования устойчивости замкнутой системы (11.47) не для конкретной функции  $\varphi(\sigma)$ , а для всех таких функций, принадлежащих некоторому множеству (*классу*)  $\Phi$ .<sup>20</sup> Таким образом, рассмотрим некоторые общие условия устойчивости, не зависящие от того, какая конкретно нелинейная зависимость имеет место.

**Определение [30].** Линейная часть системы (или, короче, система (11.45)) *абсолютно устойчива в классе  $\Phi$  нелинейных блоков* (11.46), если любая замкнутая система (11.45), (11.46) с функцией  $\varphi(\cdot) \in \Phi$  абсолютно устойчива в целом.  $\square$

Физически это означает, что система имеет достаточно хорошие свойства, которые не пропадают при замене одних блоков из данного класса другими.

Обычно рассматриваются так называемые *секторные* нелинейности, удовлетворяющие условию

$$k_1 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k_2, \quad \sigma \neq 0, \varphi(0) = 0. \quad (11.48)$$

Заметим, что условия (11.48) можно переписать в виде одного квадратичного неравенства

$$(k_2\sigma - \varphi(\sigma))(\varphi(\sigma) - k_1\sigma) \geq 0.$$

Прежде чем перейти к критериям абсолютной устойчивости нелинейных систем, рассмотрим подобную задачу для линейного случая, т.е. будем считать, что  $\varphi(\sigma) = k_0\sigma$  для некоторого постоянного коэффициента  $k_0$ . С помощью известных в теории линейных систем методов можно установить граничные значения параметра  $k_0$ , при которых сохраняется устойчивость линейной системы  $k_0 \in [k_1, k_2]$ .<sup>21</sup> Этот промежуток определяет так называемый *сектор (угол) Гурвица*. Графически условие устойчивости выглядит в виде сектора на плоскости  $(\varphi, \sigma)$ , ограничивающего график зависимости  $\varphi = \varphi(\sigma)$ .

<sup>20</sup> Такая постановка задачи соответствует рассмотренному в предыдущем параграфе примеру, в котором достаточные условия устойчивости устанавливались для любой нелинейной характеристики, график которой лежит в заданном секторе.

<sup>21</sup> Возможно, граничных пар будет несколько.

В конце 40-х годов М.А.Айзерманом была выдвинута гипотеза, согласно которой сектор абсолютной устойчивости нелинейной системы совпадает с сектором Гурвица, т.е. каждая нелинейная система, у которой график зависимости  $\varphi = \varphi(\sigma)$  лежит внутри гурвицевого угла, устойчива в целом [15, 76, 94]. Впоследствии были найдены опровергающие примеры, хотя гипотезу Айзермана можно использовать для многих практически важных случаев. Известны попытки уточнить формулировку этой гипотезы с тем, чтобы расширить область ее применения. Например, Р. Калманом предъявлены более жесткие ограничения: согласно *гипотезе Калмана*, устойчивость линейной системы должна иметь место для всех  $k_0$ , ограниченных не только сектором, содержащим нелинейность  $\varphi(\sigma)$ , но и граничными значениями производной  $\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$  [94]. Заметим, что функции  $\varphi(\sigma)$ , удовлетворяющие гипотезе Калмана, удовлетворяют и гипотезе Айзермана. Но, хотя данная гипотеза оказывается справедливой для более широкого класса систем, для нее также найдены опровергающие примеры.

Перейдем к строгим критериям.

Для последующего изложения пригодится трактовка секторного условия устойчивости линейной системы по частотному критерию Найквиста. Как нетрудно заметить, устойчивость линейной системы в секторе Гурвица означает, что амплитудно-частотная характеристика линейной части системы  $W_n(j\omega)$  не пересекает отрезок вещественной оси  $\left[-\frac{1}{k_1}, -\frac{1}{k_2}\right]$ , охватывая его требуемое (по количеству "неустойчивых" полюсов разомкнутой системы) число раз.

Сформулируем основные положения наиболее известных критериев абсолютной устойчивости: *кругового критерия* и *критерия Попова*. Более подробное изложение, включающее и доказательства, можно найти в [56]. Доказательства основаны на так называемой *частотной теореме (лемме) В.А.Якубовича-Р.Калмана*, (см. [30, 76] и ниже с. 321) <sup>22</sup>.

<sup>22</sup> Отметим, что первоначальное доказательство В.М. Попова было получено другим методом: так называемым *методом априорных оценок*, который имеет и иные применения в теории нелинейных систем [56].

### 11.5.2. Круговой критерий

Пусть выполнены следующие условия:

1)  $k_1 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k_2$ ,  $\sigma \neq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  (т.е. выполнено секторное условие (11.48)), причем  $k_1 \neq \infty$ ,  $k_2 \neq -\infty$ ; 2) существует такое  $k_0$ ,  $k_1 \leq k_0 \leq k_2$ , что линейная система с обратной связью вида  $\varphi(\sigma) = k_0\sigma$  асимптотически устойчива; 3) разомкнутая система  $W_{\pi}(s) = \frac{B_{\pi}(s)}{A_{\pi}(s)}$  не имеет полюсов на мнимой оси, т.е.  $A_{\pi}(j\omega) \neq 0$  для всех  $\omega \in [-\infty, +\infty]$  выполнено частотное условие  $\operatorname{Re}\left((1+k_1W_{\pi}(j\omega))^*(k_2W_{\pi}(j\omega)+1)\right) > 0$ .<sup>23</sup>

Тогда замкнутая нелинейная система абсолютно устойчива в заданном классе нелинейных блоков, более того, имеет место *равномерная экспоненциальная устойчивость*, т.е. существуют такие постоянные  $c > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , что для любого решения системы (11.2) и любых  $t > t_0$  выполнено  $|x(t)| \leq c|x(t_0)|e^{-\varepsilon(t-t_0)}$  [30].

Частотное условие 4 графически интерпретируется, как отсутствие общих точек у АФХ линейной части системы с окружностью с центром на вещественной оси, проходящей на этой оси через точки  $-\frac{1}{k_1}$ ,  $-\frac{1}{k_2}$ .

Видно, что круговой критерий задает более жесткие условия для линейной части системы, чем гипотеза Айзермана. Подчеркнем, что он является только достаточным условием абсолютной устойчивости в том смысле, что невыполнение условия 4 означает неприменимость к данной системе этого критерия. Возможно, посредством другого критерия абсолютную устойчивость удастся обосновать.

Круговой критерий исчерпывает все критерии, которые могут быть получены с помощью квадратичной функции Ляпунова  $V(x) = x^T H x$ ,  $H = H^T > 0$  [30]. Рассмотрим теперь следующий, более "тонкий" частотный критерий В.М. Попова, который для простоты сформулируем лишь для случая  $k_1 = 0$  (общий случай может быть сведен к этому заменой  $\tilde{\varphi} = \varphi + k_1\sigma$ ).

<sup>23</sup> Звездочкой здесь обозначена операция комплексного сопряжения, как частный случай эрмитового сопряжения, означающего для матриц, кроме того, и транспонирование.

### 11.5.3. Критерий В.М. Попова

Частотный критерий В.М. Попова гласит, что если выполнены условия: 1) линейная часть системы асимптотически устойчива; 2) нелинейность  $\varphi(\cdot)$  – однозначная и стационарная (допускаются изолированные точки разрыва первого рода), <sup>24</sup>  $0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k$ ,  $\sigma \neq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  ( $k = \infty$  не исключается); 3) существует  $\vartheta$  такое, что для всех  $\omega \in [0, \infty]$  справедливо частотное неравенство  $\frac{1}{k} + \operatorname{Re}\left((1 + j\omega\vartheta)W_{\pi}(j\omega)\right) > 0$ , то имеет место абсолютная устойчивость в заданном классе нелинейных блоков [15, 30, 76, 83, 94].

Данный критерий имеет удобную геометрическую интерпретацию. Для этого вводится *видоизмененная частотная характеристика*  $W_*(j\omega) = U_*(\omega) + jV_*(\omega)$ , где  $U_*(\omega) \triangleq U_{\pi}(\omega) = \operatorname{Re}(W_{\pi}(j\omega))$ ,  $V_*(\omega) \triangleq \omega V_{\pi}(\omega) = \omega \operatorname{Im}(W_{\pi}(j\omega))$ . Тогда, в соответствии с частотным неравенством, годограф видоизмененной частотной характеристики должен лежать "правее" некоторой прямой, проходящей через точку  $-\frac{1}{k}$  на вещественной оси.

Заметим, что выполнение приведенных условий Попова означает существование у системы функции Ляпунова вида  $V(x) = x^T Hx + \vartheta \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma$ . [30, 94].

Подробные сведения о более общем методе получения частотных условий устойчивости – частотной теореме Якубовича–Калмана приведены в [30] и в [56].

Обратимся теперь к задаче исследования специфических движений, появление которых возможно у нелинейных систем с разрывной правой частью – скользящих режимов.

## 11.6. Исследование скользящих режимов. Метод эквивалентного управления

### 11.6.1. Понятие о скользящих режимах

Пусть (замкнутая) система описывается уравнениями вида (10.7):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (11.49)$$

---

<sup>24</sup> Это условие может быть несколько ослаблено, [30].

либо эквивалентными им уравнениями вида (10.8), (10.9):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\xi(t), \quad \sigma(t) = Cx(t), \\ \xi(t) &= \varphi(\sigma, t). \end{aligned} \quad (11.50)$$

Кроме того, используем следующую форму записи уравнений системы [102], в которой явно выделено управляющее воздействие  $u(t)$ :<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \psi(x(t), u(t), t), \\ u(t) &= U(x, t). \end{aligned} \quad (11.51)$$

Известно много систем, для которых нелинейные зависимости (функции в правых частях (11.51)) претерпевают разрыв. Типичными примерами служат механические системы с сухим (кулоновским) трением, различные системы с релейным законом управления, в том числе и оптимальные по быстродействию системы управления, а также системы с регуляторами *переменной структуры* (СПС) ([8, 76, 93, 102, 191]).

Для таких систем возникают трудности, связанные с определением движений на множестве точек разрыва. В некоторых ситуациях решение можно получить, рассматривая движение системы до и после точки разрыва, используя конечные значения переменных состояния в качестве начальных на следующем участке траектории. Такая ситуация имеет место, когда фазовые траектории "прошивают" поверхность разрыва. Но возможны случаи, в которых фазовые кривые "стыкуются" на поверхности разрыва. Тогда изображающая точка не может покинуть эту поверхность и остается на ней. Возникает "*скользящий режим*" – движение изображающей точки по поверхности разрыва в течение некоторого конечного интервала времени. Существенно, что в этом случае решение бесконечно много раз попадает на поверхность разрыва. Здесь моменты разрыва не являются изолированными точками, как в предыдущем случае, а образуют отрез-

---

<sup>25</sup> Заметим, что эти уравнения можно рассматривать как представление модели замкнутой системы "по функциональному признаку", в которых выделены уравнения объекта управления (10.5) и уравнения регулятора (10.7). Однако в (11.51) не указано, что является выходом и состоянием объекта. Поэтому регулятор может быть динамическим и некоторые компоненты вектора состояния могут относиться к регулятору.

ки оси времени. Возникает вопрос определения понятия решения уравнений с разрывной правой частью, когда моменты, для которых наступает разрыв, плотно лежат на некотором интервале. Данные определения должны учитывать как инженерно-физические, так и математические соображения. Они должны обеспечивать возможность математического исследования систем (включая теоремы существования и продолжимости решений, теоремы устойчивости), а также адекватно описывать физическую реальность [30].

Известно несколько способов определения движений в скользящем режиме. Рассмотрим некоторые из них.

Среди указанных методов можно выделить *физический* и *аксиоматический* подходы [30, 102].

Физический подход развит в работах М.А. Айзермана и Е.С. Пятницкого и вкратце состоит в следующем. Для рассматриваемой системы составляется более точная математическая модель, в которой учитываются такие факторы, как запаздывание, гистерезис, инерционность, ограниченность скорости изменения сигнала и коэффициента усиления, и т.д. Действие этих факторов приводит к тому, что в рассматриваемой модели системы отсутствует описанный выше *"идеальный"* скользящий режим и возникает *"реальный"* скользящий режим с изолированными моментами разрыва правых частей уравнений. Изображающая точка не остается на поверхности разрыва, а *"прошивает"* ее в противоположных направлениях.<sup>26</sup> Для таких систем исчезает отмеченная выше специфическая проблема, связанная с тем, что моменты принадлежности изображающей точки поверхности разрыва образуют отрезки времени, следовательно решение может быть получено обычным образом. После того, как получены уравнения реального скользящего режима, выполняется предельный переход. Движение системы в идеальном скользящем режиме рассматривается как предел, к которому стремится реальный скользящий режим при стремлении указанных факторов к нулю.

С одной стороны, такой подход оправдан с инженерной

---

<sup>26</sup> Можно также сказать, что если в идеальном скользящем режиме изображающая точка совершает колебания с бесконечной частотой и нулевой амплитудой относительно поверхности разрыва, то в реальном скользящем режиме частота колебаний конечна, а амплитуда не равна нулю.

точки зрения. С другой стороны, он является трудоемким. Кроме того, нет гарантии, что при составлении модели учтены все (или именно те, которые необходимы) факторы. Эти обстоятельства препятствуют применению физического подхода, в том числе и в практических приложениях.

Аксиоматический подход состоит в доопределении уравнений системы при движении в скользящем режиме таким образом, чтобы получились уравнения с гладкой правой частью, решения которых описывали бы движение по поверхности разрыва. Применение аксиоматического подхода существенно проще, чем физического, но полученные с помощью его результаты нуждаются в проверке с точки зрения соответствия физической реальности. В качестве критерия адекватности иногда используют физический подход [102].

В следующих параграфах аксиоматический подход рассмотрен более подробно.

### 11.6.2. Определение движения в скользящем режиме

Задача определения движений в скользящем режиме разными авторами рассматривается в несколько отличающихся постановках.

В большом числе математических работ рассматриваются уравнения вида (11.49) и считается, что на некоторой поверхности, заданной уравнением  $\sigma(x, t) = 0$ , функция  $f(\cdot)$  претерпевает разрыв первого рода, т.е. <sup>27</sup>

$$f(x, t) = \begin{cases} f^+(x, t), & \sigma(x, t) > 0, \\ f^-(x, t), & \sigma(x, t) < 0. \end{cases}$$

Требуется определить такую непрерывную (по  $x$ ) функцию  $f^0(x, t)$ , чтобы уравнение  $\dot{x}(t) = f_0(x, t)$  описывало движение изображающей точки по поверхности разрыва, т.е. при  $\sigma(x, t) \equiv 0$  на некотором временном интервале.

Другими словами, если векторы фазовой скорости по разные стороны от поверхности разрыва  $v^+(x)$ ,  $v^-(x)$  направлены в противоположные области, то в системе возникает скользящий режим. Требуется определить вектор фазовой скорости

---

<sup>27</sup> Заметим: это означает, что вектор фазовой скорости  $v(x)$  имеет разные направления в соседних точках, разделенных поверхностью разрыва  $\sigma(x, t) = 0$ .

$v^0$  на поверхности  $\sigma(x, t) = 0$ , при котором изображающая точка двигалась бы по указанной поверхности.

В работе [30] дается несколько другая постановка данной задачи. Рассматриваются уравнения (11.50) и считается, что при некоторой  $\sigma = \sigma_0(t)$  функция  $\varphi(\sigma, t)$  имеет разрыв. Ставится задача определения выходов нелинейных блоков  $\varphi(\sigma, t)$  при  $\sigma(t) \equiv \sigma_0(t)$ .

Для таких систем в [30] рекомендуется использовать запись уравнений нелинейной части системы в виде *включений*  $\xi(t) \in \varphi(\sigma, t)$ , где функция  $\varphi(\sigma, t)$  принимает конкретные значения вне точек разрыва (и тогда включение превращается в обычное равенство) либо имеет значения из некоторого выпуклого множества  $\Xi$ , например промежутка  $[\xi^-, \xi^+]$ . Тогда задача определения движения в скользящем режиме сводится к определению конкретного значения  $\xi_0(t) \in \Xi$  при  $\sigma(t) = \sigma_0(t)$ . Заметим, что если вернуться к предыдущей постановке задачи, то такой подход аналогичен использованию вместо дифференциального уравнения (11.49) *дифференциального включения*  $\dot{x}(t) \in f(x(t), t)$ .

В работе [102] рассматриваются уравнения вида (11.51), причем считается, что управляющее воздействие имеет разрыв на поверхности  $\sigma(x, t) = 0$ , т.е.

$$u(t) = \begin{cases} u^+(x, t), & \sigma(x, t) > 0, \\ u^-(x, t) & \sigma(x, t) < 0 \end{cases}$$

Требуется найти такое непрерывное управление  $u_{eq}(t)$  (называемое "эквивалентным"), которое отвечало бы движению системы по поверхности разрыва  $\sigma(x, t) = 0$ .

Рассмотрим теперь некоторые методы определения решений систем с разрывной правой частью.

Одним из наиболее известных методов определения решений разрывных систем является *метод А.Ф. Филиппова*.

В этом методе используются уравнения вида (11.49). Для определения поля фазовых скоростей на поверхности разрыва в соответствии с определением Филиппова следует построить отрезок, соединяющий концы векторов  $v^+(x)$  и  $v^-(x)$  для данной точки на поверхности разрыва и провести из точки  $x$  вектор  $v^0(x)$  в точку пересечения данного отрезка с касатель-

ной плоскостью. <sup>28</sup> Полученный вектор и является искомым вектором фазовой скорости на поверхности разрыва.

Как показано в [30], определению Филиппова соответствует минимально возможное множество  $\varphi(\sigma, t)$  из всех допустимых, поэтому для данного метода чаще, чем для других, имеется единственность решений. Однако, как отмечено там же, имеется много случаев, когда физически осмысленные решения не являются решениями в смысле Филиппова.

Согласно работе [30], решения разрывных систем должны удовлетворять уравнениям вида (11.50), где уравнения нелинейных блоков понимаются как включения, т.е. выполнено

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\xi(t), \\ \xi(t) &\in \varphi(Cx(t), t).\end{aligned}$$

Вектор-функция  $\xi(t)$  называется тогда *доопределенной нелинейностью*. Каждому решению  $x(t)$  соответствует своя доопределенная нелинейность. При  $\det B^T B \neq 0$ ,  $\xi(t)$  можно получить из уравнений системы единственным образом, а именно, как

$$\xi(t) = \left( B^T B \right)^{-1} B (\dot{x}(t) - Ax(t)).$$

Таким образом, согласно [30], неоднозначная нелинейная функция  $\varphi(\cdot)$  в (11.50) принимает конкретные (и различные в разные моменты времени) значения согласно поведению линейной части системы.

Далее будем рассматривать системы, у которых  $\dim \xi(t) = \dim \sigma(t) = m$  и  $i$ -я компонента вектора  $\varphi$  зависит от  $i$ -й компоненты вектора  $\sigma$ :  $\varphi_i = \varphi_i(\sigma_i)$ .

Для того чтобы определить, как ведет себя решение в скользящем режиме, надо принять, что по условию должно выполняться равенство  $\sigma(t) = \sigma_0(t)$ . Таким образом, для линейной части можно записать систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\xi(t), \quad Cx(t) = \sigma_0(t),$$

---

<sup>28</sup> В данном изложении дается геометрическая интерпретация метода Филиппова, который может быть представлен и аналитическими соотношениями. Кроме того, здесь рассматривается частный вид функции  $f(\cdot)$  и поверхность разрыва считается гладкой [30, 102].

где  $\sigma_0(t)$  – заданная функция времени. Характеристический многочлен этой системы имеет вид

$$D(s) = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_n - A & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

По лемме Шура  $D(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A) \det(-C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B)$ .<sup>29</sup> Поскольку полученное выражение есть произведение характеристического многочлена линейной части системы на определитель ее передаточной матрицы, то имеем следующий результат.

Характеристический многочлен системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих полный (т.е. для всех компонент вектора  $\sigma(t)$ ) скользящий режим системы (11.50), с точностью до знака совпадает с произведением характеристического многочлена линейной части системы на определитель ее передаточной матрицы [30].

Для систем с одной скалярной нелинейностью характеристический многочлен скользящего режима с точностью до знака совпадает с числителем передаточной функции (в случае вырожденности которой предполагается, что степень знаменателя равна порядку уравнений состояния системы, сокращений не произведено).

Рассмотрим теперь изложенный в [102] *метод эквивалентного управления*. В данном методе используются уравнения вида (11.51). Предполагая наличие в системе скользящего режима по поверхности  $\sigma(x) = 0$ , получаем, что производная по времени от  $\sigma(x(t))$  в силу системы (11.51) должна равняться нулю. Так как эта производная зависит от управления, то можем найти соответствующее *эквивалентное управление*  $u_{eq}(t)$  из уравнения  $\dot{\sigma}(t) = 0$ . Найденное управление подставляется в уравнения (11.51), которые решаются совместно с уравнением скользящего режима  $\sigma(x(t)) = 0$ . Как и выше, получаем систему алгебро-дифференциальных уравнений, которая

<sup>29</sup> Леммой Шура называются следующие тождества:

$$\text{при } \det A \neq 0, \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B),$$

$$\text{а при } \det D \neq 0, \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C), [30].$$

в данном случае имеет вид

$$\dot{x}(t) = \psi(x(t), u_{eq}(t), t), \quad \sigma(x(t)) = 0.$$

Рассмотрим более подробно применение метода эквивалентного управления для системы вида (11.50), полагая  $\sigma_0(t) \equiv 0$ . Сравнивая (11.50) и (11.51), получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \sigma(t) = Cx(t).$$

Вычисляя  $\dot{\sigma}(t)$  находим, что  $\dot{\sigma}(t) = C(Ax(t) + Bu(t))$ , откуда по методу эквивалентного управления  $u_{eq}(t) = -(CB)^{-1}CAx(t)$  (полагаем  $\det CB \neq 0$ ). Отсюда получаем систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = (A - B(CB)^{-1}CA)x(t), \quad Cx(t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что данная система имеет характеристический многочлен  $D(s) = \det(s\mathbf{I}_n - A) \det(-C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B)$ , совпадающий с полученным выше по методу работы [30] многочленом.

Таким образом, мы видим, что часто разные способы определения движений в скользящем режиме приводят к одинаковым результатам. Более подробные сведения имеются в работах [30, 102].

Столь большое внимание к определению поведения систем в скользящих режимах связано не только со стремлением к полноте математических методов теории систем или с появлением разрывных зависимостей при описании некоторых физических процессов. Как отмечено выше, имеется целый класс систем с искусственно введенной нелинейностью, которые работают в принудительно возбужденном скользящем режиме – системы с переменной структурой (СПС) со скользящими режимами [8, 21, 101, 102, 191]. Сведения о построении и использовании таких систем приведены в п. 12.1.

## 12. НЕЛИНЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

В настоящей главе изложены основы двух весьма плодотворных подходов к синтезу нелинейных систем управления: систем с переменной структурой и адаптивных систем. Оба подхода позволяют синтезировать регуляторы при неполной априорной информации о параметрах объекта управления. Продемонстрирована возможность применения обоих подходов в условиях неполноты измерений, а также их совместного использования.

### 12.1. Системы с переменной структурой в задаче управления

Для управления в условиях неполной информации о параметрах объекта могут оказаться эффективными так называемые *системы с переменной структурой (СПС)* [8, 9, 40, 102, 191]. Основная идея построения СПС состоит в использовании переключающихся законов управления (соответствующим различным *структурам* замкнутой системы) [40, 102]. Переключение происходит на основе текущей информации о состоянии объекта управления в соответствии с выбранной *функцией переключения*.

Возможны различные способы построения СПС. Наиболее универсальным и разработанным методом является принудительная организация в замкнутой системе *скользящих режимов*, при которых изображающая точка в пространстве состояний системы движется по выбранной поверхности. На эту поверхность точка попадает за конечное время после начала переходного процесса [101, 102], а затем остается на ней неограниченно долго (или в течение конечного промежутка времени). В результате, поведение замкнутой системы мало зависит (или совсем не зависит) от параметров объекта управления, а определяется выбранным при синтезе регулятора уравнением поверхности переключений.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что данное утверждение относится именно к установившемуся скользящему режиму. Траектория движения вне этого режима зависит от свойств объекта. Существенным является возникновение устойчивого скользящего режима за конечное время.

Как будет показано ниже, принудительные скользящие режимы позволяют снизить чувствительность системы к параметрическим и координатным возмущениям, а также добиться инвариантности по отношению к задающему воздействию. Это связано с тем, что "разрывной" характер управления сближает СПС с системами, имеющими бесконечный коэффициент усиления (в то же время, само управление в СПС остается ограниченным). Создание устойчивых скользящих режимов в СПС достигается с помощью переключения закона управления (обычно – путем изменения его параметров) на основе информации о текущем состоянии объекта [8, 102, 191]. Этот режим является желательным для обеспечения инвариантности системы [102].<sup>2</sup> Требуемые динамические свойства замкнутой системы обеспечиваются надлежащим выбором поверхности переключения, вид которой задается при синтезе. Полезной особенностью скользящих режимов является также возможность *декомпозиции* задачи проектирования. Синтез регулятора разбивается на две более простые подзадачи:

- создание устойчивых скользящих режимов;
- выбор поверхности переключения, движение по которой обладает желаемыми свойствами.

Скользящие режимы могут использоваться также для идентификации параметров и состояния объекта, построения экстремальных и адаптивных систем [5, 21, 102].

Рассмотрим задачу стабилизации линейного стационарного объекта со скалярным управлением. Динамика объекта задается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathcal{R}^n, \quad u(t) \in \mathcal{R}. \quad (12.1)$$

Зададим (как это обычно делается) линейное уравнение желаемой поверхности скольжения

$$\sigma(x(t)) = Cx(t) \equiv \sum_{i=1}^n c_i x_i(t), \quad (12.2)$$

---

<sup>2</sup> Заметим, что кроме положительного свойства инвариантности, для СПС в скользящем режиме, как и для систем с неограниченным коэффициентом усиления имеется проблема обеспечения устойчивости при неполной текущей информации о состоянии объекта, а также возможность появления нежелательных колебательных процессов.

где  $C \triangleq [c_1, c_2, \dots, c_n]$  – вектор-строка постоянных параметров, значения которых определяется при синтезе системы.

Скользющему режиму в системе соответствует тождество  $\sigma_t \equiv 0$  (через  $\sigma_t$  обозначено значение  $\sigma(x(t))$  при функции  $x(t)$ , удовлетворяющей (12.2)).

При синтезе СПС с принудительно организованными скользящими режимами требуется обеспечить выполнение следующих условий [8, 102]:

- попадание изображающей точки на поверхность разрыва (12.2);
- возникновение скользящего режима на этой поверхности;
- устойчивость скользящего режима.

Скользящий режим возникает, если отклонение от поверхности  $\sigma_t$  и скорость его изменения  $\dot{\sigma}_t$  имеют разные знаки, т.е.

$$\lim_{\sigma \rightarrow -0} \dot{\sigma} > 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \dot{\sigma} < 0. \quad (12.3)$$

Другими словами, в окрестности поверхности скольжения должно иметь место неравенство

$$\sigma(x(t), t) \dot{\sigma}(t) < 0. \quad (12.4)$$

Выполнение этого неравенства для всех  $x \in \mathcal{X}, t \in \mathcal{R}$  является достаточным (но не необходимым, [102]) условием попадания изображающей точки на поверхность разрыва.

Движение системы в скользящем режиме описывается системой уравнений (12.1), (12.2), которые эквивалентны уравнению порядка  $n - 1$ . Как отмечено выше, характеристический многочлен этого уравнения совпадает с числителем передаточной функции от  $u$  к  $\sigma$ :

$$W(s) = C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1} B \triangleq \frac{B(s)}{A(s)} \quad (12.5)$$

и, следовательно, зависит от коэффициентов  $c_i$  вектор-строки ( $1 \times n$ -матрицы)  $C$ .

Эти коэффициенты определяются методами теории линейных систем, исходя из требований устойчивости и качества процесса стабилизации. Возможность использования СПС со скользящими режимами для решения задач адаптивного

управления определяется тем, что при соответствующем выборе переменных состояния динамика движения системы по поверхности скольжения зависит от вектора  $C$ , а не от параметров объекта (матриц  $A, B$ ).<sup>3</sup>

Управляющее воздействие должно быть выбрано так, чтобы обеспечить устойчивый скользящий режим по заданной поверхности (гиперплоскости). Здесь проявляется упомянутая декомпозиция задачи синтеза СПС – обеспечение качества процессов в системе (в скользящем режиме) и обеспечение устойчивого скользящего режима являются разными подзадачами. Возможность их независимого решения упрощает процедуру синтеза.

Рассмотрим сначала управление в виде линейной комбинации переменных состояния системы [101]

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n k_i(x(t)) x_i(t), \quad (12.6)$$

где коэффициенты регулятора претерпевают разрыв на поверхности  $\sigma(x) = 0$  и определяются выражением

$$\begin{aligned} k_i(x) &= \begin{cases} k_i^+, & \text{если } x_i \sigma(x) > 0, \\ k_i^-, & \text{если } x_i \sigma(x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ \sigma(x) &= Cx. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Здесь  $k_i^+, k_i^-$  – постоянные коэффициенты закона управления, определяемые при синтезе. Для их выбора используем неравенство (12.4)  $\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$ . Исходя из этого условия, получим [101] неравенства

$$\begin{aligned} (\text{sign}(CB)) k_i^+ &> |CB|^{-1} C a^i, \\ (\text{sign}(CB)) k_i^- &< |CB|^{-1} C a^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (12.8)$$

где  $a^i$  – столбцы матрицы  $A \triangleq [a^1, a^2, \dots, a^n]$ . Эти же условия достаточны и для попадания на плоскость  $Cx = 0$  из любого исходного состояния. Следовательно, в такой системе за конечное время возникает устойчивый (не прекращающийся)

---

<sup>3</sup> Точное утверждение, позволяющее установить количественные соотношения сформулировано на с. 294. Отметим, что если уравнения объекта имеют вид управляемого канонического представления (см. [3, 4, 102], п. 2.2.), то при  $\sigma(x) = Cx$  для (12.5) выполнено  $V(s) = c_1 + c_2 s + \dots + c_n s^{n-1}$  и движение в скользящем режиме не зависит от параметров объекта (12.1).

скользящий режим, движение в котором за счет надлежащего выбора вектора  $C$  может быть наделено желаемыми свойствами.

Количество используемых переменных и коэффициентов в законе управления можно уменьшить. Например, можно использовать алгоритм [101]

$$u(x) = - \sum_{i=1}^{n-1} k_i(x) x_i - \delta_0 \text{sign}(\sigma(x)), \quad (12.9)$$

где  $\delta_0 = \text{const} > 0$  – выбираемый при синтезе параметр алгоритма так, чтобы выполнялось условие  $\text{sign}(\delta_0) = \text{sign}(CB)$ . Достаточные условия возникновения и устойчивости скользящего режима при этом несколько усложняются и принимают вид

$$\begin{aligned} (\text{sign}(CB)) k_i^+ &\geq |CB|^{-1} Ca^i - c_i (Ca^n), \\ (\text{sign}(CB)) k_i^- &\leq |CB|^{-1} Ca^i - c_i (Ca^n), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ Ca^n &< 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Рассмотрим теперь некоторое линейное непрерывное управление

$$u_i(t) = \gamma^T x(t), \quad (12.11)$$

где  $\gamma$  – выбранный вектор коэффициентов (которые могут иметь и нулевые значения). Пусть  $n - 1$  корень характеристического многочлена замкнутой системы (12.1), (12.11) соответствует желаемому расположению корней в скользящем режиме, а оставшийся корень принимает произвольное (вещественное) значение.

Рассмотрим также разрывное управление в СПС-регуляторе

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{если } \sigma(x) > 0, \\ u^-(x), & \text{если } \sigma(x) < 0, \end{cases} \quad (12.12)$$

где  $u^+(x)$ ,  $u^-(x)$  – непрерывные функции состояния.

Можно показать [102], что условия, при которых в системе (12.1), (12.12) на всей плоскости  $Cx = 0$  существуют устойчивые скользящие режимы, следуют из неравенств (12.3) и имеют вид

$$CBu^+(x) > CBu_l(x), \quad CBu^-(x) > CBu_l(x) \quad (12.13)$$

Поскольку  $u_i$  является линейной комбинацией некоторых координат вектора состояния, то видно, что неравенства (12.13) можно выполнить, если брать  $u$  кусочно-линейным относительно тех же координат:

$$u(t) = -\Psi(x(t))x(t) - \delta(x(t)), \quad (12.14)$$

где  $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_k, 0, \dots, 0]$ ,

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } (CB)x_i\sigma(x) > 0, \\ \beta_i, & \text{если } (CB)x_i\sigma(x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\delta(x) = \delta_0 \text{sign}(CB\sigma(x)),$$

где  $\delta_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq -\gamma_i$ . Поэтому управление можно выбирать и в более простом виде

$$u(t) = -\psi_l(x(t))u_l(x(t)) - \delta(x(t)), \quad (12.15)$$

$$\text{где } \psi_l(x) = \begin{cases} \alpha_l, & \text{если } (CB)u_l\sigma(x) > 0, \\ \beta_l, & \text{если } (CB)u_l\sigma(x) < 0, \end{cases}$$

$$\delta(x) = \delta_0 \text{sign}(CB\sigma(x)),$$

$$\alpha_l \geq -1, \quad \beta_l \leq -1.$$

Во всех приведенных выше уравнениях СПС-регуляторов предполагается наличие информации о полном векторе состояния объекта  $x(t)$  (в первую очередь – при формировании сигнала  $\sigma(x)$ ). Это обстоятельство существенно затрудняет применение СПС на практике, так как обычно приходится работать в условиях неполной текущей информации.

Одним из путей устранения этой трудности является применение наблюдающих устройств (см. гл. 8. а также [3, 4, 8, 47, 102]). Но при синтезе "обычных" наблюдающих устройств требуется достаточно точное знание динамических свойств объекта управления.

При использовании наблюдающих устройств со скользящими режимами, описанными в [5, 9, 21, 102] и 12.6.3. уменьшается чувствительность наблюдателей к параметрическим возмущениям, что позволяет получить оценки состояния при изменении параметров объекта в широких пределах.

Более сложная (но потенциально имеющая более широкие возможности) процедура, предполагающая совмещение процессов оценки состояния и параметров объекта, реализуется

в *адаптивных наблюдающих устройствах* [2, 7, 106, 116] (см. ниже 12.6.5. с. 336).

Информация о параметрах объекта может быть получена в процессе работы на основе методов идентификации без оценки состояния. Совмещение процедуры идентификации со скользящими режимами при решении задачи адаптивного управления описано в [122].

Задача построения систем со скользящими режимами, в которых используются измерения только выходной координаты объекта рассматривается в [9, 119, 191].

В [9] рассматривается объект управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Lx(t), \quad (12.16)$$

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^l$ . Требуется обеспечить возникновение (за конечное время) устойчивого скользящего режима по поверхности  $Cy = 0$ , где  $c$  – заданный  $l$ -мерный вектор. Для достижения поставленной цели используем релейный закон управления

$$u = -\gamma \text{sign} \sigma(y), \quad \sigma(y) = Cy, \quad (12.17)$$

с некоторым  $\gamma > 0$ .

Будем говорить, что передаточная функция  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  соответствует *строго минимально-фазовой* системе, если  $B(s)$  – гурвицев (устойчивый) многочлен степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами [36, 106], где  $n = \deg A(s)$ . Определение на случай векторного управления (ММО-объект) дано в [64, 106]. На основе применения частотной теоремы с обратной связью (см. ниже, с. 321) показано, что если передаточная функция  $W_u^\sigma(s)$  от управления  $u$  к переменной  $\sigma$

$$W_u^\sigma(s) = CL(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B \quad (12.18)$$

строго минимально-фазовая, то при достаточно большом  $\gamma$  за конечное время возникает скользящий режим и обеспечивается цель управления  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .<sup>4</sup> Для уменьшения зависимости устойчивости системы от начальных условий и

<sup>4</sup> Доказательство, основанное на использовании функции Ляпунова  $V(x) = |\sigma(y(x))|$  дано в [106].

параметров объекта в [9] предлагается алгоритм с адаптивной настройкой вектора коэффициентов усиления  $K \in \mathcal{R}^l$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= -K^T(t)y(t) - \gamma \operatorname{sign}(\sigma(y(t))), \quad \sigma(y(t)) = Cy(t), \\ \dot{K}(t) &= -\sigma(y(t))\Gamma y(t), \end{aligned} \quad (12.19)$$

где  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ ,  $\gamma > 0$  – параметры алгоритма.

## 12.2. Системы с переменной структурой в задаче оценивания состояния

Известным методом получения более полной текущей информации о поведении объекта управления является использование рассмотренных в гл. 8. с. 181 наблюдателей. При синтезе алгоритма оценивания имеет смысл не ограничиваться описанными в гл. 8. линейными структурами, а использовать и возможности нелинейных методов управления, в том числе – организации скользящих режимов в системах с переменной структурой [5, 21, 22, 102]. Поскольку такие системы обладают, в некотором смысле, адаптивными свойствами, близкими к свойствам систем с сигнальной адаптацией (по этому поводу см., например, [9, 74] и 12.5.), аналогичных свойств можно ожидать и от систем оценивания состояния. Использование скользящих режимов в наблюдателях предназначено, в первую очередь, для уменьшения ошибок, связанных с неточностью математической модели объекта. Рассмотрим этот подход более подробно.

Запишем уравнения линейного стационарного объекта в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t) \in \mathcal{R}^n, y(t) \in \mathcal{R}^l. \quad (12.20)$$

Объект (12.20) считаем полностью наблюдаемым. Не нарушая общности рассуждений, можно принять, что  $\operatorname{rank} C = l$ .

Следуя [102], рассмотрим возможность осуществления декомпозиции движения наблюдателя за счет преднамеренного введения скользящего режима. Представим выход объекта в виде  $y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ , причем  $x(t) = \operatorname{col}\{x_1(t), x_2(t)\}$ ,  $x_2(t) \in \mathcal{R}^l$ ,  $\det C_2 \neq 0$ . Заметим, что выполнение указанного представления всегда возможно, так как, по условию,  $\operatorname{rank} C = l$ . Перейдем к новым переменным состояния. В качестве нового вектора состояния используем

вектор  $\tilde{x}(t) \triangleq \text{col}\{x_1(t), y(t)\}$  (ср. с описанными в п. 8.3. с. 187 наблюдателями Луенбергера). Очевидно, переход к вектору  $\tilde{x}$  выполняется невырожденным преобразованием с матрицей

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-l} & \mathbf{0} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-l \\ \}l \end{matrix}.$$

Уравнения состояния системы в результате преобразования принимают вид  $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$ , где  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ . Более подробно их можно записать как

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t), \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t). \end{cases} \quad (12.21)$$

$$\text{Здесь } \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-l \\ \}l \end{matrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-l \\ \}l \end{matrix}.$$

Как показано в работе [102], из наблюдаемости пары  $(A, C)$  следует и наблюдаемость пары  $(A_{11}, A_{21})$ , т.е. наблюдаемость системы  $\dot{x}_1 = A_{11}x_1$  с выходом  $z = A_{21}x_1$ .

Запишем теперь уравнения наблюдателя со скользящим режимом. Они имеют вид [102]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) - Lv(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) + v(t), \end{cases} \quad (12.22)$$

где  $v(t) = M \text{sign } \sigma_t$ ,  $\sigma_t \triangleq y(t) - \hat{y}(t)$ , постоянная  $M > 0$  – величина "полки реле", функция  $\text{sign}(\cdot)$  от векторного аргумента понимается покомпонентно.

Вычитая из (12.21) уравнения (12.22), получим уравнения относительно ошибок оценивания:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = A_{11}\varepsilon(t) + A_{12}\sigma_t + Lv(t), & \varepsilon \triangleq x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\ \dot{\sigma}(t) = A_{21}\varepsilon(t) + A_{22}\sigma_t - v(t). \end{cases} \quad (12.23)$$

Разрывная вектор-функция  $v(t)$  выбирается таким образом, чтобы на многообразии  $\sigma = 0$  возникло движение в скользящем режиме. Этим обеспечивается равенство  $y(t) \equiv \hat{y}(t)$ . Как показано в [102], при ограниченном начальном рассогласовании всегда найдется такое (достаточно большое)  $M$ , при котором скользящий режим возникает.

Матрица  $L$  определяется исходя из требования устойчивости движения в скользящем режиме и желаемой динамики

системы относительно рассогласования  $\varepsilon$ . По методу эквивалентного управления (см. с. 297) для получения уравнения скольжения следует решить уравнение  $\dot{\sigma}_t = 0$  относительно  $v(t)$  и найденное решение  $v \triangleq v_{eq}$  подставить в первое уравнение системы (12.23), полагая  $\sigma_t \equiv 0$ . Выполняя эти преобразования, получаем  $v_{eq} = A_{21}\hat{x}_1$ , поэтому

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_{11}\varepsilon(t) + LA_{21}\varepsilon(t) \quad (12.24)$$

В силу наблюдаемости пары  $(A_{11}, A_{21})$  всегда можно подобрать матрицу  $L$  так, чтобы обеспечить любое заданное расположение собственных чисел системы (12.24), и, следовательно – желаемую динамику движения в скользящем режиме (по этому поводу см. п. 7.3. , с. 174, и п. 8.5 с. 185).

Можно заметить общие и отличительные свойства наблюдателя (12.22) и рассмотренного в п. 8.3. на с. 188 наблюдателя Луенбергера (8.10). При синтезе обоих наблюдателей выполняются однотипные преобразования базиса переменных состояния, сходным образом находится матрица коэффициентов обратной связи, а также и в том, и в другом случае обеспечивается равенство нулю рассогласования  $\sigma$  между выходом объекта и его оценкой. Разница состоит в том, что наблюдатель Луенбергера является системой пониженного порядка, в которой последнее условие выполняется тождественно в силу самой процедуры синтеза. Порядок наблюдателя (12.22) равен порядку объекта управления и условие  $\sigma_t \equiv 0$  обеспечивается организацией скользящих режимов и наступает по истечении некоторого промежутка времени.<sup>5</sup>

В литературе [5, 21, 22] известны и другие, несколько отличные от (12.22) структуры и методы синтеза наблюдателей со скользящими режимами.

### 12.3. Методы адаптивного управления

#### 12.3.1. Задача адаптивного управления

В конце XX столетия развитие теории систем автоматического управления и ее практических приложений характеризовалось интенсивной разработкой методов адаптивного управ-

---

<sup>5</sup> Выше, на с. 300, уже отмечено, что в скользящем режиме система описывается уравнениями пониженного порядка.

вления. Эти методы служат для построения систем управления при значительной неопределенности параметров объекта управления и условий его функционирования (характеристик среды), имеющейся на стадии проектирования или до начала эксплуатации системы. Рассматриваются такие задачи управления, при которых динамические свойства объекта могут изменяться в широких пределах неизвестным заранее образом. Имеющейся начальной (*априорной*) информации недостаточно для построения систем управления с оптимальными (или заданными) показателями качества. В адаптивных системах управления недостаток априорной информации восполняется в процессе ее функционирования на основе текущих данных о поведении объекта. Эти данные обрабатываются в реальном масштабе времени (в темпе протекания управляемого процесса) и используются для повышения качества системы управления.

Применение принципов адаптации позволяет:

- обеспечить работоспособность системы в условиях значительного изменения динамических свойств объекта;
- произвести оптимизацию режимов работы объекта при изменении его параметров;
- снизить технологические требования к изготовлению отдельных узлов и элементов системы;
- унифицировать отдельные регуляторы или блоки регуляторов, приспособив их для работы с различными видами однотипных объектов;
- сократить сроки конструкторских испытаний;
- повысить надежность системы.

В настоящее время этот раздел теории управления достиг высокой степени зрелости. Ниже рассматриваются основные положения теории адаптивных систем. Более подробно об этой теории можно прочесть в книгах [64, 103, 106], а также в трудах санкт-петербургских симпозиумов по теории адаптивных систем [186].

### *12.3.2. Структура адаптивных систем управления*

Процесс адаптивного управления можно рассматривать как процесс взаимодействия трех подсистем [74, 75, 93, 103, 106]:

- объекта;

- *настраиваемого регулятора основного контура* (собственно *регулятора*);
- блока адаптации ("*адаптора*").

Два последних блока объединяются в *адаптивный регулятор*, который имеет двухуровневую иерархическую структуру. Регулятор основного контура непосредственно формирует управляющее воздействие  $u(t)$ , поступающее на объект управления. Закон (алгоритм) управления в основном контуре зависит от некоторого набора *настраиваемых параметров* регулятора  $\theta$ . Настройка этих параметров производится на втором уровне в соответствии с некоторым законом, называемым *алгоритмом адаптации* на основе доступной текущей информации и без непосредственного использования значений параметров, априорно не известных.

Располагаемая априорная информация о значениях параметров характеризуется заданием некоторого множества  $\Xi$  их возможных значений [103]. Конкретный набор параметров объекта (и характеристик среды) образует вектор *неизвестных параметров*  $\xi \in \Xi$ . Считается заданной некоторая *цель управления*. Адаптивный регулятор должен привести к выполнению поставленной цели управления для любого  $\xi \in \Xi$ . Если то условие выполнено, то система называется *адаптивной в классе  $\Xi$*  [103] (или просто *адаптивной*).<sup>6</sup>

*Цель управления* обычно задается с помощью некоторого *функционала качества*, значения которого вычисляются по измеряемым выходам объекта. В зависимости от конкретной задачи цель управления считается достигнутой, если указанный функционал либо принимает экстремальное значение, либо его величина находится в заданных пределах.

Кроме цели управления используется и *цель адаптации*. Она также формализуется с помощью некоторого функционала и может либо совпадать с целью управления, либо отличаться от нее, являясь некоторой вспомогательной целью, служащей для решения основной задачи управления. Такой целью может быть, например, *идентификация объекта* – полу-

---

<sup>6</sup> Ниже для конкретных типов систем это общее определение будет уточнено и в некоторых случаях модифицировано. Например, имеются системы с *сигнальной адаптацией* (см. п. 12.4.), у которых задача адаптивного управления решается с помощью дополнительного сигнала управления, а не путем настройки параметров регулятора. Кроме того, для систем других типов возможно использование других обозначений.

чение оценок  $\hat{\xi}$  неизвестных параметров  $\xi$ .

При аналоговой реализации адаптивного регулятора процессы в системе описываются в виде функций непрерывного аргумента (времени). Такие системы называются *непрерывными* адаптивными системами. При цифровой реализации процессы в системе являются дискретными последовательностями и такие системы называются *дискретными* адаптивными системами. Впрочем, такое разделение не означает, что непрерывный алгоритм адаптивного управления не может быть реализован цифровым регулятором. Это значит только, что при синтезе адаптивного регулятора процессы считаются непрерывными и не учитывается их квантование по времени при реализации системы, а синтез регулятора выполняется на основе *аналогового прототипа*. Существенным является сохранение с заданной точностью свойств системы при дискретизации закона управления. Достаточно общие результаты по обоснованию такого перехода получены в рамках *метода непрерывных моделей* [36, 59].

### 12.3.3. Методика решения задач адаптивного управления

Пусть задача адаптивного управления поставлена на содержательном уровне и формализована. Это означает, что задано математическое описание объекта управления и внешних воздействий с точностью до неизвестных параметров  $\xi$ . Указано также множество  $\Xi$  значений этих параметров, дана спецификация управляющих воздействий и измеряемых выходов объекта. Кроме того, должна быть сформулирована цель управления.

Процесс синтеза адаптивного регулятора можно разбить на следующие этапы [2, 7, 74, 93, 103, 106].

**Этап 1. Выбор "идеального" закона управления.** Находится закон управления, обеспечивающий принципиальную возможность достижения указанной цели управления. Вектор параметров  $\xi$  предполагается известным. Полученный закон управления непосредственно реализован быть не может, так как он зависит, в общем случае, от неизвестных параметров объекта. В этом смысле его можно назвать *идеальным законом управления*. Например, такой закон управления может строиться на основе решения задачи оптимального управления [2, 47, 93]. Но и не оптимальные (в обще-

принятом смысле этого слова) законы управления также могут рассматриваться как "идеальные", поскольку речь идет о том, что при их синтезе предполагается наличие достаточно точной информации о параметрах объекта и среды.

Обычно при синтезе идеального закона управления делают некоторые упрощающие предположения относительно динамики объекта, а также пренебрегают некоторыми возмущениями и помехами измерений.

Иногда основную цель управления заменяют некоторой *вспомогательной (вторичной) целью*, выполнение которой косвенно позволяет достигнуть и исходную цель.

**Этап 2. Выбор настраиваемых параметров и цели адаптации.** Известные параметры, от которых зависит найденный идеальный закон управления заменяются *настраиваемыми параметрами*. В результате получается алгоритм управления, в который уже не входят неизвестные параметры, поэтому он может быть реализован регулятором.

Известны два подхода к синтезу адаптивных регуляторов.

При *прямом подходе* настраиваемыми параметрами являются непосредственно коэффициенты закона управления (т.е. регулятора нижнего уровня). Количество настраиваемых параметров выбирается по возможности наименьшим.

При *идентификационном (непрямом)* подходе выполняется оценивание значений, необходимых для синтеза регулятора неизвестных параметров объекта и характеристик внешних воздействий. Далее выполняется процедура *совместного синтеза* – оценки параметров используются для вычисления коэффициентов, входящих в закон управления.

Когда настраиваемые параметры выбраны, ставится *цель адаптации*. Это – некоторое вспомогательное целевое условие, являющееся основой для последующей разработки алгоритма адаптации. При прямом подходе цель адаптации совпадает с исходной, либо вспомогательной, целью управления. При идентификационном подходе цель адаптации обычно сводится к обеспечению совпадения, или близости, оценок неизвестных параметров к их "истинным" значениям. Вспомогательная цель адаптации при таком подходе может выражаться, например, как совпадение реакций объекта управления и *настраиваемой модели* объекта на внешнее воздействие. Настраиваемая модель описывается уравнени-

ями, аналогичными уравнениям объекта управления, в которых неизвестные параметры заменены их (настраиваемыми) оценками.

Требуемые свойства системы управления обычно задаются *эталонной моделью* [2, 74, 75, 93]. Эта модель может включаться в систему явно, в виде некоторого динамического звена, обладающего заданной реакцией на командное (задающее) воздействие, либо неявно – присутствовать в виде некоторых ”уставок” (параметров) алгоритма адаптации. Соответственно, системы первого типа называются системами с *явной эталонной моделью*, а системы второго типа – с *неявной эталонной моделью*. Оба типа систем рассмотрены в п. 12.4. 12.5.

Системы с явной эталонной моделью могут быть подразделены, в свою очередь, исходя из способа достижения цели на системы с *параметрической* и *сигнальной* адаптацией.

В системах с сигнальной настройкой эффект адаптации достигается без изменения параметров регулятора путем увеличения его коэффициентов или обеспечением скользящих режимов (см. п. 12.1.). Такие системы безусловно проще в реализации, однако они обеспечивают желаемое поведение только в относительно узком диапазоне значений параметров объекта.

В системах с параметрической адаптацией цель достигается изменением параметров регулятора. Эти системы более универсальны, однако обладают более сложной структурой. Алгоритмы адаптации используют сигнал рассогласования между выходами системы и эталонной модели. Сложность этих систем определяется количеством настраиваемых параметров.

Для повышения точности систем и скорости адаптации можно использовать *сигнально-параметрические алгоритмы*, в которых сочетается сигнальная и параметрическая адаптация. В таких системах сигнальная адаптация обеспечивается обычно быстрым релейным алгоритмом. Параметрическая адаптация имеет ”узкую полосу пропускания” и служит для стабилизации коэффициентов передачи в заданных пределах. Такие системы, кроме быстродействия и точности, также более просты в реализации, поскольку присутствие сигнальной компоненты позволяет уменьшить число настраиваемых па-

раметров.

Идентификационный подход ("*метод настраиваемой модели*") рассмотрен в п. 12.6. Заметим, что здесь также можно использовать *явную и неявную настраиваемые модели*.

**Этап 3. Выбор алгоритма адаптации.** Как правило, алгоритмы адаптации представляют собой рекуррентные процедуры, относящиеся к классу *методов последовательного улучшения* [2, 78, 93, 103]. Так как в условиях неопределенности добиться сразу выполнения цели управления, вообще говоря, невозможно, то алгоритм адаптации осуществляет последовательное изменение настраиваемых параметров, приближаясь к выполнению цели. Такого рода алгоритмы обычно строятся на основе процедур градиентного типа.

Решающее влияние на работоспособность алгоритма адаптации оказывает выбор *коэффициента усиления (параметра шага)* алгоритма. Для решения этой задачи известны такие методы, как *метод наименьших квадратов, метод стохастической аппроксимации и метод рекуррентных целевых неравенств*.<sup>7</sup>

**Этап 4. Исследование работоспособности адаптивной системы.** Заключительным этапом синтеза адаптивного регулятора, предваряющим разработку его технической реализации, является исследование работоспособности системы с учетом характера возмущений, внешних воздействий, ограничений на переменные состояния объекта и других факторов, которые не учитывались при синтезе. На этом этапе также уточняются параметры алгоритма адаптации и, возможно, выполняется его модификация.

Значительную роль в обосновании работоспособности адаптивных систем управления играет прямой метод Ляпунова [30, 66, 64, 76, 93, 103]. Но этот метод является в основном инструментом для теоретических исследований и не может дать ответы на все вопросы, касающиеся устойчивости и качества работы адаптивных регуляторов в реальных условиях. Поэтому большое место в исследовании адаптивных систем управления играет моделирование. Особенно велико значение моделирования на этапе получения количественных характеристик системы. Для упрощения процедуры модели-

---

<sup>7</sup> Некоторые сведения о методе рекуррентных целевых неравенств приведены в Приложении В., с. 413.

рования и многовариантного анализа систем применяются проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ. В настоящее время получили наибольшее распространение пакеты MATLAB и Simulink [32, 72, 81, 82], часто используемые и в данной книге (см. также [10]).

Надо заметить, что характерной особенностью процесса проектирования адаптивных систем управления является его цикличность. Как правило, алгоритм адаптации удается синтезировать при значительном упрощении модели объекта, и на следующих стадиях проектирования может оказаться, что выбранный алгоритм, или даже метод адаптивного управления, не отвечает условиям поставленной задачи и процесс проектирования повторяется.

Обратимся к задаче адаптивного управления непрерывными объектами.<sup>8</sup> Основное число беспоисковых алгоритмов адаптации, для которых имеются условия работоспособности, являются алгоритмами *скоростного градиента* (см. [9, 103, 106] и Приложение А. с. 407). Поэтому изложение будет вестись на основе указанной схемы, хотя многие из рассмотренных алгоритмов были получены независимо.

Обширная библиография на данную тему содержится в обзорах [9, 141], а также в монографиях [23, 74, 93, 103, 106] и учебной литературе [2, 7, 8]. Более формализованное изложение, содержащее также ряд новых алгоритмов адаптивного управления по выходу (без измерения производных), см. в [64].

Как отмечено выше, целью применения методов адаптивного управления является обеспечение заданных динамических свойств системы в условиях априорной неопределенности параметров объекта и характеристик внешних возмущений.

## 12.4. Адаптивные системы с явной эталонной моделью

### 12.4.1. Алгоритмы параметрической адаптации

#### 1. Настройка коэффициентов уравнений состояния

Рассматривается *обобщенный настраиваемый объект (ОНО)*

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)r(t), \quad (12.25)$$

---

<sup>8</sup> Более точно было бы сказать "к алгоритмам управления непрерывного действия," так как дискретные алгоритмы управления применяются и для непрерывных объектов.

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния обобщенного объекта;  $r(t) \in \mathcal{R}^m$  – внешнее командное (задающее) воздействие;  $A, B$  –  $n \times n$ - и  $n \times m$ -матрицы неизвестных параметров ОНО;  $\Delta A, \Delta B$  –  $n \times n$ - и  $n \times m$ -матрицы настраиваемых параметров. Цель управления – совпадение вектора состояния ОНО  $x(t)$  с вектором состояния  $x_M(t) \in \mathcal{R}^n$  (явной) эталонной модели, которая задается уравнением

$$\dot{x}_M(t) = A_M x_M(t) + B_M r(t), \quad (12.26)$$

где  $A_M, B_M$  –  $n \times n$ - и  $n \times m$ -матрицы, описывающие желаемую динамику замкнутой системы (матрица  $A_M$  гурвицева).

Алгоритмы адаптивного управления для решения поставленной задачи получены в ряде известных публикаций по теории *беспоисковых самонастраивающихся систем с эталонной моделью (БСНС с ЭМ)* [41, 42, 74, 75]. Покажем, как выводится алгоритм адаптации по методу скоростного градиента [9, 103, 106].

Для этого введем целевой функционал  $Q_t \triangleq \frac{1}{2} e(t)^T P e(t)$ , где  $e(t) \triangleq x(t) - x_M(t)$  – вектор ошибки;  $P = P^T > 0$  – некоторая  $n \times n$ -матрица, выбор которой будет описан ниже. Вычислим  $\omega(x, \theta, t) \equiv \dot{Q}_t = e(t)^T P ((A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)r(t) - A_M x_M(t) + B_M r(t))$ .<sup>9</sup> Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{\Delta A} \omega(x, \theta, t) &= P e(t) x(t)^T, \\ \nabla_{\Delta B} \omega(x, \theta, t) &= P e(t) r(t)^T. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Алгоритм скоростного градиента в дифференциальной форме (А.14) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta A(t) &= -\gamma P e(t) x(t)^T, \\ \frac{d}{dt} \Delta B(t) &= -\gamma P e(t) r(t)^T. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Проверка работоспособности алгоритма производится исходя из указанных выше условий (при  $\psi(x, \theta, t) \equiv 0$ ). Условие выпуклости выполнено в силу линейности ОНО (линейности правой части (12.25) по  $\theta$ ). Условие достижимости также, очевидно, выполнено при  $\theta_* = \text{col}\{A_M - A, B_M - B\}$ . Матрица

---

<sup>9</sup> Вектором настраиваемых параметров  $\theta$  в данном случае является набор элементов матриц  $\Delta A(t), \Delta B(t)$ .

$P = P^T > 0$  должна удовлетворять уравнению Ляпунова <sup>10</sup>  
 $PA_M + A_M^T P = -G$  для некоторой  $G = G^T > 0$ . Действительно,  
тогда существует некоторое  $\alpha_0 > 0$  такое что

$$\omega(x, \theta, t) = \epsilon(t)^T P A_M \epsilon(t) = -0.5 \epsilon(t)^T G \epsilon(t) \leq -\alpha_0 Q_t.$$

Условие роста выполнено для ограниченного  $x_M(t)$ , т.е. для  
ограниченного командного сигнала  $r(t)$ .

При влиянии возмущений может возникнуть неограничен-  
ный рост значений параметров регулятора. Для его предот-  
вращения целесообразно использовать *регуляризованный* ал-  
горитм адаптации [9, 103, 106]. Регуляризованный АСГ с  
функцией  $\xi(\theta)$  вида  $\xi(\theta) = \alpha(\theta - \hat{\theta})$  выглядит как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta A(t) &= -\gamma \left( P \epsilon(t) x(t)^T + \alpha (\Delta A(t) - \Delta \hat{A}) \right), \\ \frac{d}{dt} \Delta B(t) &= -\gamma \left( P \epsilon(t) r(t)^T + \alpha (\Delta B(t) - \Delta \hat{B}) \right), \end{aligned} \quad (12.29)$$

где  $\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}$  – некоторые априорные оценки настраиваемых  
параметров (подробнее см. в [64]).

Скорость настройки параметров можно увеличить, если  
использовать АСГ в конечно-дифференциальной форме (А.6),  
(А.8), которая дает следующие *пропорционально-дифференци-  
альные* алгоритмы адаптации

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta A(t) &= -\gamma P \epsilon(t) x(t)^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} (P \epsilon(t) x(t)^T), \\ \frac{d}{dt} \Delta B(t) &= -\gamma P \epsilon(t) r(t)^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} (P \epsilon(t) r(t)^T), \quad \gamma_1 > 0. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Можно убедиться, что алгоритмы адаптации (12.28), (12.30)  
обладают идентифицирующими свойствами, т.е.  $A + \Delta A(t) \rightarrow$   
 $\rightarrow A_M, B + \Delta B(t) \rightarrow B_M$  при  $t \rightarrow \infty$ , если вектор-функция  
 $\text{col}\{x_M(t), r(t)\}$  обладает достаточным разнообразием, т.е. мо-  
дель (12.26) достаточно полно возбуждается входным сигна-  
лом (например,  $r(t)$  содержит не менее  $n$  различных по частоте  
гармоник, а модель полностью управляемая).

## 2. Настройка коэффициентов регулятора

Пусть уравнения объекта имеют вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (12.31)$$

---

<sup>10</sup> Вывод этого уравнения из условий существования у линейной систе-  
мы квадратичной функции Ляпунова приведен в 11.4.4. на с. 274.

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  – управляющее воздействие. Через  $r(t) \in \mathcal{R}^m$  по-прежнему обозначим командное (задающее) воздействие.

Снова возьмем целевую функцию в виде  $Q_t \triangleq \frac{1}{2} e^T P e$ ,  $e = x(t) - x_M(t)$ ,  $P = P^T > 0$ , где  $x_M(t)$  – вектор состояния эталонной модели (12.26). Пользуясь схемой скоростного градиента, получаем

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = e(t)^T P (Ax(t) + Bu(t) - A_M x_M(t) - B_M r(t)). \quad (12.32)$$

Пусть для любых  $x, x_M \in \mathcal{R}^n$ ,  $r \in \mathcal{R}^m$  уравнение

$$Ax(t) + Bu_*(t) - A_M x_M(t) - B_M r(t) = A_M e(t) \quad (12.33)$$

разрешимо относительно  $u_* \in \mathcal{R}^m$ . Тогда  $u_*(t)$  удовлетворяет соотношению

$$u_*(t) = K_r^* r(t) + K_x^* x(t). \quad (12.34)$$

Здесь  $K_r^* = B^+ B_M$ ,  $K_x^* = B^+ (A_M - A)$ , т.е.  $A_M - A \subset \mathcal{L}(B)$ ,  $B_M \subset \mathcal{L}(B)$ , где  $\mathcal{L}(B)$  – линейное подпространство, порожденное столбцами матрицы  $B$ . Это в свою очередь эквивалентно соотношению

$$\text{rank} B = \text{rank} \{B, B_M\} = \text{rank} \{B, A_M - A\}. \quad (12.35)$$

Условия (12.35) называются *условиями Эрцбергера*, условиями *адаптируемости*, *совместимости* или *точного соответствия модели*.

При выполнении этих условий существуют матрица  $P = P^T > 0$  и вектор-функция  $u_*(t)$  такие, что  $\omega(x, \theta, t) \leq -e(t)^T G e(t) \leq -\alpha_0 Q_t$ , т.е. условие достижимости (A.10) выполнено при  $\rho(Q_t) = \alpha_0 Q_t$ . Матрица  $P$  может быть найдена из решения уравнения Ляпунова

$$P A_M + A_M^T P = -G, \quad G = G^T > 0.$$

Возьмем в качестве вектора настраиваемых параметров  $\theta \triangleq \text{col}\{K_x, K_r\}$ . Скоростной градиент получается в виде

$$\begin{aligned} \nabla_{K_x} \omega(x, \theta, t) &= B^T P e(t) x(t)^T, \\ \nabla_{K_r} \omega(x, \theta, t) &= B^T P e(t) r(t)^T. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Тогда АСГ в дифференциальной форме записывается как [41, 75]

$$\begin{aligned} u(t) &= K_r(t)r(t) + K_x(t)x(t), \\ \frac{d}{dt}K_x(t) &= -\gamma B^T P e(t)x(t)^T, \\ \frac{d}{dt}K_r(t) &= -\gamma B^T P e(t)r(t)^T. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Алгоритмы вида (12.37) были получены в работах [38, 41, 75].

Известны результаты, согласно которым число производных от выхода объекта с передаточной функцией  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , используемых в алгоритме управления, можно снизить до  $n - k - 1$ , где  $k = \deg B(s)$ . При этом требуется минимально-фазовость объекта, т.е. гурвицевость полинома  $B(s)$  (по этому поводу см. также п. 12.1. утверждение относительно передаточной функции (12.18) на с. 304).

Кроме того, начиная с 70-х годов появилось большое число публикаций, посвященных задаче адаптивного управления без измерения производных от выхода [39, 64, 69]. В 12.6.5. кратко описывается применение для этой цели адаптивных наблюдающих устройств. Другой подход, основанный на методах неявной эталонной модели и шунтирования, представлен в п. 12.7.

#### 12.4.2. Алгоритмы сигнальной адаптации

Алгоритмы сигнальной адаптации [74, 75, 170] не предполагают настройки параметров регулятора. Они относятся к АСГ в конечной форме.

Рассмотрим снова задачу слежения с явной эталонной моделью (12.26). Уравнения объекта возьмем в виде (12.31).

Используя целевую функцию  $Q_t \triangleq \frac{1}{2}e(t)^T P e(t)$ ,  $P = P^T > 0$ , мы получаем (12.32):  $\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = e(t)^T P (Ax(t) + Bu(t) - A_M x_M(t) - B_M r(t))$ . Как и выше, матрица  $P$  находится из уравнения Ляпунова  $PA_M + A_M^T P = -G$  для некоторой  $G = G^T > 0$ . Используем теперь в качестве вектора настраиваемых параметров непосредственно сигнал управления  $u(t)$  ( $\theta(t) \equiv u(t)$ ), и получим алгоритм управления в виде АСГ в конечной форме (А.15), (А.9). Для этого вычислим скоростной градиент

$$\nabla_u \omega(x, \theta) = B^T P e(t).$$

Отсюда алгоритм (A.15) принимает (при  $\theta_0 = 0$ ) вид

$$u(t) = -\gamma \text{sign}(B^T P e(t)). \quad (12.38)$$

Алгоритмы вида (12.38) обладают высоким быстродействием, но у них отсутствуют идентифицирующие свойства (это очевидно, так как нет настраиваемых параметров). При изменении параметров объекта в широких пределах целесообразно использовать сигнально-параметрические алгоритмы, описанные в ниже.

### 12.4.3. Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации

В системах с сигнально-параметрической адаптацией [43, 75] сигнальная составляющая вводится обычно для обеспечения высокой скорости настройки и компенсации быстрого изменения параметров. Параметрическая адаптация включает интегральную составляющую для компенсации параметрических и координатных возмущений, которые меняются достаточно медленно, но в широких пределах.

В качестве примера рассмотрим систему, в которую входят объект управления (12.31) и эталонная модель (12.26). Цель управления:  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Функционал качества зададим в виде  $Q_t = \frac{1}{2} e(t)^T P e(t)$ . Тогда выражение для  $\dot{Q}$  имеет вид (12.32). Можно убедиться, что выполнение условий (12.35) обеспечивает единственность решения (12.33) относительно  $u_* \in \mathcal{R}^m$  для всех  $x, x_M \in \mathcal{R}^n$  и  $r \in \mathcal{R}^m$ . Для  $u_*$  имеем соотношение

$$u_* = K_{x_M}^* x_M + K_r^* r + u_s, \quad (12.39)$$

где  $K_{x_M}^* = B^+(A_M - A)$ ,  $K_r^* = B^+ B_M$ ,  $u_s^* = B^+(A_M - A)$ .

Таким образом, при выполнении условий адаптируемости имеются матрица  $P = P^T > 0$  и вектор-функция  $u^*(t)$  вида (12.39) такие, что выполняется условие достижимости (A.10). Матрица  $P$  находится как решение уравнения Ляпунова  $P A_M + A_M^T P = -G$ , где  $G = G^T > 0$ .

По аналогии с выражением (12.39) выберем алгоритм управления в основном контуре в виде

$$u(t) = K_{x_M}(t) x_M(t) + K_r(t) r(t) + u_s(t), \quad (12.40)$$

где  $K_{x_M}(t)$ ,  $K_r(t)$ ,  $u_s(t)$  – настраиваемые параметры, образующие вектор  $\theta(t) = \text{col}\{K_{x_M}(t), K_r(t), u_s(t)\}$ . Задавая матрицей  $\Gamma$  в блочно-диагональной форме

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 \mathbf{I}_{mm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

получим алгоритм управления

$$\begin{aligned} u(t) &= K_{x_M}(t)x_M(t) + K_r(t)r(t) - \gamma \text{sign}(B^T P e(t)), \\ \frac{d}{dt}K_{x_M}(t) &= -\gamma_1 B^T P e(t)x_M(t)^T, \\ \frac{d}{dt}K_r(t) &= -\gamma_2 B^T P e(t)r(t)^T, \end{aligned} \quad (12.41)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma > 0$ .

Наиболее сложной задачей при построении систем с явной эталонной моделью является построение основного контура системы, обеспечивающего выполнения условий адаптируемости (12.35). Это приводит к сложной структуре системы для объектов высокого порядка и многосвязных (ММО) объектов [74, 93]. Рассмотренные в следующем параграфе алгоритмы с неявной моделью, а также близкие к ним алгоритмы систем с переменной структурой (см. главу 12.1.) лишены этого недостатка. Поэтому такие системы могут быть рекомендованы, когда системы с явной моделью нереализуемы либо слишком сложны для использования.

## 12.5. Адаптивные системы с неявной эталонной моделью

Рассмотрим теперь методы прямого адаптивного управления, в которых модель не включена в систему "явно" – в виде некоторого динамического звена (аналогового или цифрового), а присутствует "неявно" в качестве некоторого "эталонного уравнения". Применение таких систем снижает требования к структуре основного контура и полноте наблюдаемых данных.

Как и для систем с явной эталонной моделью, будут рассмотрены алгоритмы параметрической и сигнально-параметрической адаптации. Что касается сигнальных алгоритмов, то, как нетрудно видеть, они ничем не отличаются от алгоритмов СПС, уже рассмотренных в п. 12.1.

12.5.1. Алгоритмы параметрической адаптации

Рассмотрим уравнения обобщенного настраиваемого объекта в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & y(t) &= Cx(t), \\ u(t) &= K(t)^T y(t), \end{aligned} \quad (12.42)$$

где  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{R}$ ,  $y \in \mathcal{R}^l$ ,  $K(t) \in \mathcal{R}^l$  – вектор настраиваемых параметров регулятора.

Используем целевой функционал  $Q_t \triangleq \frac{1}{2}x(t)^T Px(t)$ , где  $P = P^T > 0$ . Применим метод скоростного градиента. Получим, что

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = x(t)^T P (Ax(t) + BK^T y(t)), \quad \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) = x(t)^T P B y(t).$$

Так как выражение  $x(t)^T P B y(t)$  должно зависеть только от измеряемых переменных (иначе неизменяемые переменные войдут в закон управления), получаем условие  $PB = C^T g$  для некоторого  $l$ -мерного вектора  $g$ . Предполагая это условие выполненным, запишем АСГ в виде [36]

$$\dot{K}(t) = -\sigma(y(t)) \Gamma y(t), \quad \sigma(y) = g^T y, \quad (12.43)$$

где матрица коэффициентов усиления  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ .

Для проверки работоспособности алгоритма следует установить только выполнение условия разрешимости (А.10). Оно удовлетворяется, если существует вектор  $K_*$  такой, что  $x^T P A_* x < 0$ , где  $A_* = A + BK_*^T C$ . Таким образом, должны существовать матрица  $P = P^T > 0$  и вектор  $K_*$  такой, что

$$P A_* + A_*^T P < 0, \quad P B = C^T g, \quad A_* = A + BK_*^T C. \quad (12.44)$$

Решение этой задачи дает следующая теорема (*частотная теорема с обратной связью или теорема о пассивации*) [64, 104, 106].

**Теорема.** Для существования матрицы  $P = P^T > 0$  и вектора  $K_*$ , удовлетворяющих (12.44), необходимо и достаточно, чтобы функция  $g^T W(s)$  была строго-минимально-фазовой.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Напомним, что передаточная функция  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  соответствует строго-минимально-фазовой системе, если  $B(s)$  – гурвицев (устойчивый) многочлен степени  $n - 1$ ,  $n = \deg A(s)$  с положительными коэффициентами [36, 106].

Здесь  $W(s) = C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B$  – передаточная функция объекта управления.

Таким образом, при выполнении указанного условия на  $g^T W(s)$ , обеспечивается выполнение цели управления  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $K(t) \rightarrow \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

При практическом использовании алгоритма (12.43) существенно, что в процессе адаптации величина  $\sigma(t)$  затухает достаточно быстро (обычно быстрее, чем переходный процесс в системе). Полагая  $\sigma(t) \equiv 0$ , мы можем интерпретировать уравнение  $g^T y(t) = 0$  как некоторое "эталонное уравнение", которое задает желаемую динамику замкнутой системы<sup>12</sup>.

Описанный подход можно распространить и на системы слежения за задающим воздействием  $r(t)$  [7, 103]. В [120] описан адаптивный пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор с неявной эталонной моделью для решения задачи слежения.

### 12.5.2. Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации

Рассмотрим объект управления, выходной сигнал которого непосредственно представляет собой "ошибку" (рассогласование)  $\sigma(t)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \sigma(t) = g^T x(t), \quad (12.45)$$

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t), \sigma(t) \in \mathcal{R}$ .

Пусть цель управления имеет вид  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Возьмем целевую функцию в виде  $Q_t = \frac{1}{2}\sigma(t)^2$  и вспомогательную цель управления  $Q_t = 0$  при  $t \geq t_*$ . Такая вспомогательная цель характерна для рассмотренных в главе 12.1. систем с переменной структурой на скользящих режимах.

Следуя схеме скоростного градиента, получим

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = g^T x (g^T Ax + g^T Bu(t)). \quad (12.46)$$

Закон управления в основном контуре возьмем в виде

$$u(t) = K(t)x(t) + u_s(t), \quad (12.47)$$

---

<sup>12</sup> Как отмечено в главе 12.1.  $n - 1$  корней характеристического уравнения замкнутой системы при  $\sigma(t) \equiv 0$  совпадает с корнями числителя передаточной функции  $g^T W(s)$ , а  $n$ -й корень стремится к  $-\infty$  [30, 106].

где вектор настраиваемых параметров  $\theta(t) \triangleq \text{col}\{K(t), u_s(t)\}$ .

Далее получим

$$\begin{aligned}\nabla_K \omega(x, \theta, t) &= (g^T B) g^T x x^T, \\ \nabla_{u_s} \omega(x, \theta, t) &= (g^T B) g^T x.\end{aligned}\quad (12.48)$$

Тогда алгоритм адаптивного управления для АСГ в конечной форме (А.15) принимает вид

$$\begin{aligned}u(t) &= K(t)x(t) - \gamma \text{sign}(g^T B) \sigma(t), \\ K(t) &= -\gamma_1 (g^T B) \sigma(t) x(t)^T.\end{aligned}\quad (12.49)$$

Отметим, что в системе (12.45), (12.48) возникает скользящий режим (см. п. 12.1.) на поверхности  $g^T x = 0$ , следовательно, для достижения цели управления  $\lim_{t \rightarrow \infty} g^T x(t) = 0$  требуется строгая минимально-фазовость передаточной функции  $W(s) = g^T (s\mathbf{I} - A)^{-1} B$ .

Рассмотрим теперь АСГ в дифференциальной форме. Используем структуру закона управления в виде (А.6) с матрицей

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{где } \gamma_1 > 0.$$

Получим алгоритм управления

$$\begin{aligned}u(t) &= K(t)x(t) + K_r(t)r(t) - \gamma \text{sign}(g^T B) \sigma(t), \\ \frac{d}{dt} K(t) &= -\gamma_1 (g^T B) \sigma(t) x(t)^T,\end{aligned}\quad (12.50)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma > 0$ .

Для повышения скорости настройки параметров имеет смысл использовать алгоритм настройки  $K(t)$  в конечно-дифференциальной форме [9]

$$\frac{d}{dt} K(t) = -\gamma_1 (g^T B) \sigma(t) x(t)^T - \gamma_2 \frac{d}{dt} (g^T B) \sigma(t) x(t)^T. \quad (12.51)$$

Сигнально-параметрический алгоритм управления, использующий только выход  $y(t)$  объекта [119], приведен в 12.1. (формула (12.19), с. 305).

### 12.5.3. Пример. Адаптивное управление летательным аппаратом

В качестве примера рассмотрим задачу управления углом тангажа летательного аппарата (ЛА). Для описания динами-

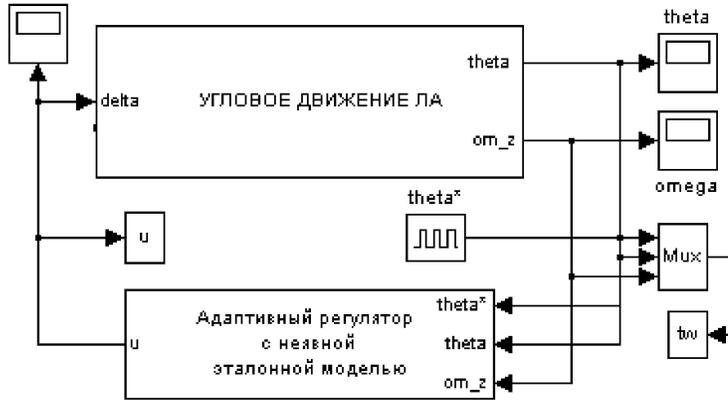


Рис. 12.1. Блок-диаграмма модели адаптивной системы управления ЛА.

ки объекта используем приведенную в 1.5.3. на с. 42 передаточную функцию, которая относительно угла тангажа имеет вид<sup>13</sup>

$$W_{\vartheta}^{\delta_b}(s) = \frac{\delta_{b m_z}(s - a_y^\alpha)}{s(s^2 + (a_{m_z}^{\omega_z} + a_y^\alpha)s + a_{m_z}^\alpha + a_y^\alpha a_{m_z}^{\omega_z})}.$$

Требуется обеспечить заданную динамику процесса слежения  $\vartheta(t)$  за командным (задающим) воздействием  $\vartheta(t)^*$  при неопределенности параметров ЛА (коэффициентов  $a_{m_z}^{\delta_b}$ ,  $a_y^\alpha$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z}$ ,  $a_{m_z}^\alpha$ ,  $a_y^\alpha$ .) Покажем применение алгоритма адаптивного управления с неявной эталонной моделью (12.43) и алгоритма систем с переменной структурой (СПС) для решения этой задачи.

Пусть угол  $\vartheta$  и угловая скорость тангажа  $\omega_z$  измеряются и могут быть использованы в алгоритме управления. Для работоспособности систем с неявной моделью как и СПС, требуется соблюдение условия строгой минимально-фазовости. Как нетрудно убедиться, в рассматриваемой задаче оно может быть выполнено, если числитель передаточной функции  $W_{\vartheta}^{\delta_b}(s)$  – гурвицев многочлен. Это значит, что должно выполняться неравенство  $a_y^\alpha < 0$ . Оно соответствует физике движе-

<sup>13</sup> Чтобы соблюсти привычное для работ по теории управления правило знаков, числитель  $W_{\vartheta}^{\delta_b}(s)$  взят со знаком "плюс".

ния тела в атмосфере [19, 23]. Кроме того, коэффициенты  $g$  в (12.43) должны выбираться положительными (при  $a_{m_z}^{\delta_b} > 0$ ). Используя регуляризацию (более подробно см. [103, 106], а также [64]) и перейдя к *рассогласованию*  $\varepsilon \triangleq \vartheta^* - \vartheta$ , получим из (12.43) алгоритм адаптивного управления для рассматриваемой задачи в виде

$$\begin{aligned} \dot{k}_\vartheta(t) &= -\gamma\sigma(t)\varepsilon(t) - \alpha(k_\vartheta(t) - k_\vartheta^o), & k_\vartheta(0) &= k_\vartheta^o, \\ \dot{k}_\omega(t) &= \gamma\sigma(t)\omega_z(t) - \alpha(k_\omega(t) - k_\omega^o), & k_\omega(0) &= k_\omega^o, \\ \sigma(t) &= \tau\omega_z(t) - \varepsilon(t), & \varepsilon(t) &= \vartheta(t)^* - \vartheta(t), \\ \delta_b(t) &= k_\vartheta(t)\varepsilon(t) - k_\omega(t)\omega_z(t). \end{aligned} \quad (12.52)$$

Здесь  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления алгоритма,  $\alpha > 0$  – коэффициент регуляризации, (параметрической обратной связи),  $\tau > 0$  – постоянная времени неявной модели. Параметры  $k_\vartheta^o, k_\omega^o$  находятся на основе априорной информации об объекте для некоторого ”расчетного” режима. Заметим, что они могут быть заданы весьма приблизительно и их выбор не оказывает принципиального влияния на работоспособность адаптивной системы.

Выражение  $\sigma = \tau\omega_z - \varepsilon$  соответствует вектору  $g$  в (12.43) равному  $g = [1, \tau]^T$ . Оно задает желаемую динамику замкнутой системы. Эталонное уравнение получается при  $\sigma(t) \equiv 0$  и имеет вид

$$\tau\dot{\vartheta}(t) - \vartheta(t) = \vartheta(t)^*.$$

SIMULINK-диаграмма моделирования адаптивной системы управления ЛА приведена на рис. 12.1 – 12.3, а некоторые результаты моделирования – на рис. 12.4, 12.5. Используются следующие значения параметров объекта и алгоритма адаптации:  $a_y^\alpha = -1.3c^{-1}$ ,  $a_{m_z}^\alpha = -12.5c^{-2}$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z} = 0.5c^{-1}$ ,  $a_{m_z}^{\delta_b} = 15.2c^{-2}$ ,  $\gamma = 150$ ,  $\alpha = 0.02$ ,  $\tau = 0.5c$ .<sup>14</sup> Заметим, что процесс изменения коэффициентов регулятора протекает в темпе с процессом углового движения ЛА и *невязка адаптации*  $\sigma(t)$  затухает достаточно быстро. Вместе с тем заметно перерегулирование по углу тангажа, которое не описывается эталонным уравнением. Это связано с влиянием нуля передаточной функции ЛА.

<sup>14</sup> Данные параметры соответствуют одному из наборов значений, приведенных ниже в таблице 12.1 на с. 350.

Рассмотрим теперь управление углом тангажа с помощью регулятора с переменной структурой (12.9), описанного в п. 12.1. Поверхность скольжения определим выражением  $\sigma = \tau\omega_z - \varepsilon$ , ( $\varepsilon = \vartheta^* - \vartheta$ ), которое совпадает с выражением для невязки в алгоритме (12.52).

Тогда уравнение СПС-регулятора угла тангажа принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \tau\omega_z(t) - \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \vartheta(t)^* - \vartheta(t), \\ \delta_b(t) &= k_\vartheta \varepsilon(t) - k_\omega \omega_z(t), \\ k_\vartheta &= \begin{cases} k_\vartheta^+, & \text{при } \varepsilon\sigma \geq 0, \\ k_\vartheta^-, & \text{иначе,} \end{cases} \\ k_\omega &= \begin{cases} k_\omega^+, & \text{при } \varepsilon\sigma \geq 0, \\ k_\omega^-, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

SIMULINK блок-диаграмма модели регулятора с переменной структурой представлена на рис. 12.6. Графики переходных процессов по углу тангажа и управлению для указанных выше параметров ЛА в системе с переменной структурой приведены на рис. 12.7. Приняты следующие значения параметров закона управления: <sup>15</sup>  $k_\vartheta^+ = 2$ ,  $k_\vartheta^- = -1$ ,  $k_\omega^+ = 0.5c$ ,  $k_\omega^- = -0.25c$ ,  $\tau = 0.5c$ .

Сравнивая результаты моделирования систем с параметрической адаптацией и СПС-регулятором, видим, что для второй системы вид переходных процессов одинаков, в то время как система с параметрической адаптацией имеет некоторый период "настройки". В то же время скользящие режимы приводят к более форсированной нагрузке исполнительных органов (см. процесс  $\delta_b$ ). Возникающие при реальном скользящем режиме автоколебания, имеющие относительно высокую частоту и малую амплитуду, во многих случаях нежелательны для работы рулевых машин.

Рассмотрение данной задачи управления будет продолжено в 12.7. где рассматривается возможность уменьшения числа измеряемых переменных.

Обратимся теперь к идентификационному подходу к синтезу адаптивных систем управления, который основан на идентификации неизвестных параметров объекта и одновременном синтезе регулятора. Такой метод получил также название *метода настраиваемой модели*.

---

<sup>15</sup> Заметим, что при выбранные коэффициентов СПС-регулятора удовлетворяют приведенным на с. 302 условиям (12.10).

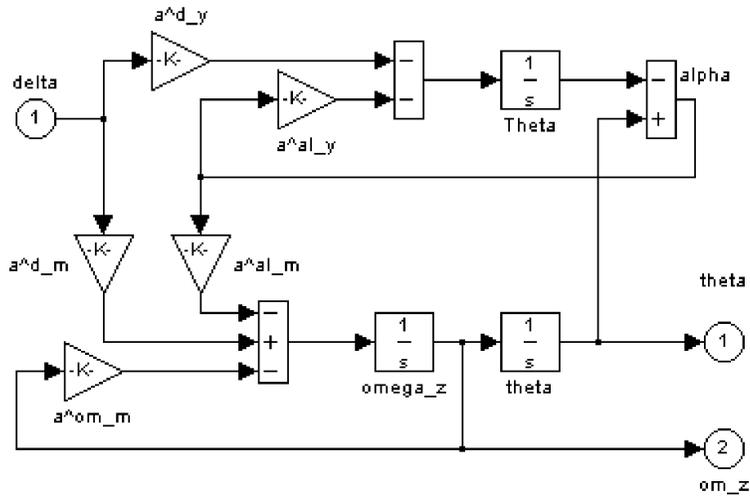


Рис. 12.2. Блок-диаграмма модели динамики углового движения ЛА.

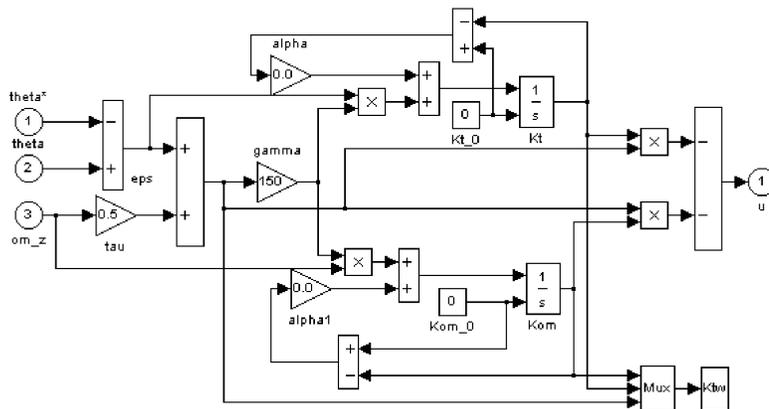


Рис. 12.3. Блок-диаграмма алгоритма адаптивного управления с неясной моделью.

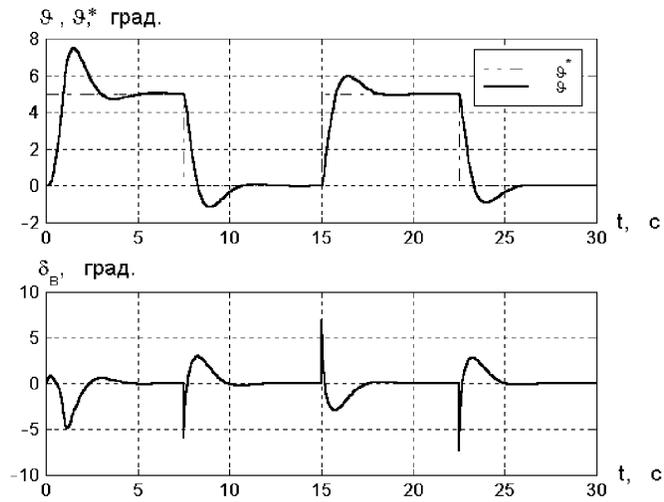


Рис. 12.4. Переходные процессы по углу тангажа  $\vartheta$  и управлению  $\delta_B$  в адаптивной системе с неявной моделью.

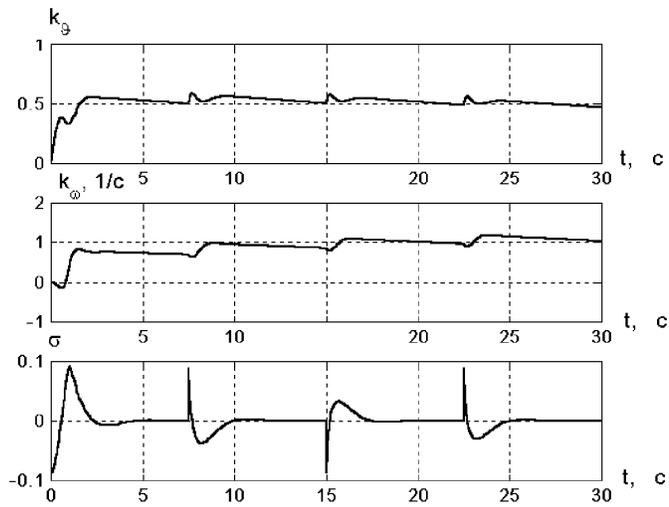


Рис. 12.5. Процесс настройки параметров и невязка алгоритма адаптации в адаптивной системе с неявной моделью.

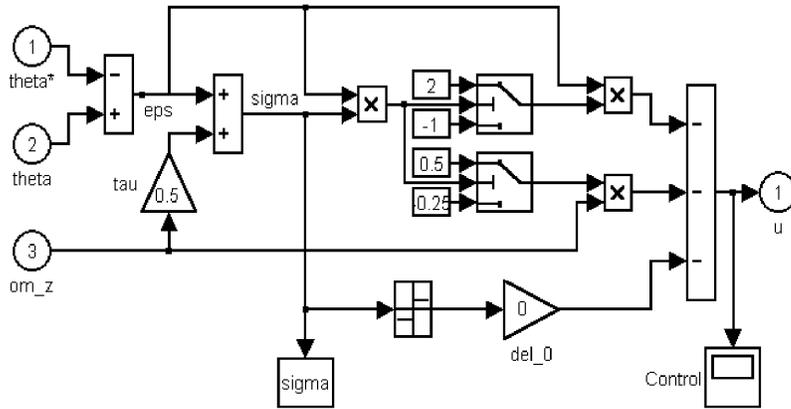


Рис. 12.6. Блок-диаграмма модели регулятора с переменной структурой.

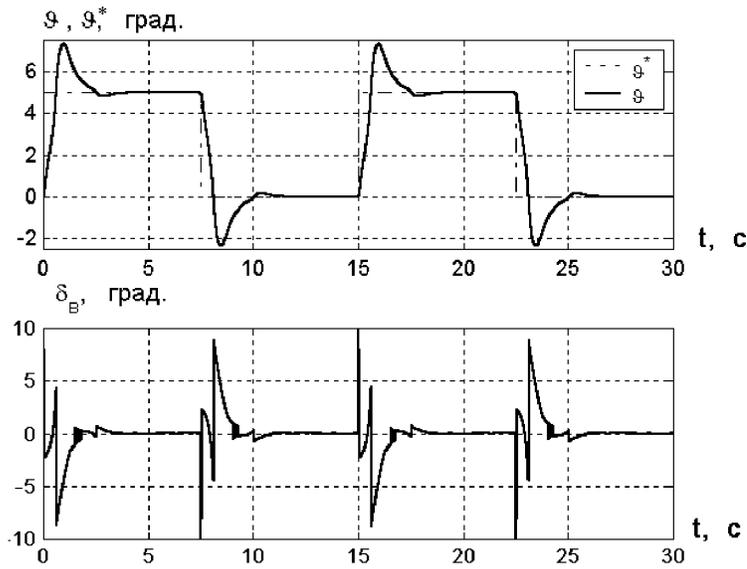


Рис. 12.7. Переходные процессы по углу тангажа  $\vartheta$  и управлению  $\delta_b$  в системе с переменной структурой.

## 12.6. Алгоритмы адаптивной идентификации

### 12.6.1. Задача параметрической идентификации

Считая задачу синтеза закона управления при известных параметрах объекта решенной, сосредоточимся на алгоритмах идентификации. Рассмотрим задачу адаптивной идентификации, при решении которой требуется получать оценки параметров объекта в реальном времени (в одном темпе с процессом) и в процессе нормального функционирования объекта. Заметим, что эта задача далека от полного решения из-за сложности обеспечения работоспособности систем, в которых оценки параметров вырабатываются в замкнутом контуре, а синтез регулятора выполняется по найденным оценкам. Основные результаты относятся к системам дискретного времени [103]. Ниже рассматриваются некоторые непрерывные алгоритмы идентификации [2, 7, 9, 23, 93, 106, 116].

Задача идентификации имеет как самостоятельное значение для построения математических моделей объектов управления [2, 59, 72, 93, 87], так и при построении адаптивных систем управления [2, 9, 93, 106, 103]. Существенная разница в этих областях применения заключается в том, что в процессе адаптивного управления процесс идентификации должен происходить при нормальном функционировании системы в реальном масштабе времени (что называется *адаптивной идентификацией*). Обеспечить сходимость оценок параметров к их значениям в последнем случае оказывается значительно сложнее. Алгоритмы неадаптивной идентификации также будут рассмотрены ниже, поскольку они имеют весьма широкое применение и часто используются в качестве исходных при синтезе адаптивных алгоритмов.

*Идентификация систем* заключается, как известно, в построении их моделей в результате обработки входных и выходных данных, полученных в результате эксперимента с системой, который может быть *активным* (планироваться направленно), или *пассивным* – осуществляться в процессе нормального функционирования системы [2, 8, 59, 93].

Реальная система всегда ведет себя не так, как ее математическая модель, поэтому с практической точки зрения следует оценивать достоверность модели не в плане ее "истинности", а скорее в плане "полезности". В дальнейшем изложе-

нии термин "*истинная система*" означает математическую модель некоторой идеализированной системы, которая описывается однозначно определенной совокупностью правил и является источником полученных в эксперименте данных наблюдений [59].

Создание моделей по результатам наблюдений включает следующие основные компоненты [8, 59, 72, 87]: 1) данные, 2) множество моделей-кандидатов, 3) правило оценки степени соответствия исследуемой модели данным наблюдений.

При проведении целенаправленных экспериментов решается задача *планирования эксперимента*, в ходе которой пользователь определяет состав входных сигналов и моменты их измерения, чтобы получить наиболее полную информацию о свойствах системы. В других случаях пользователю (процедуре идентификации) приходится опираться на данные нормальной эксплуатации системы.

Множество *моделей-кандидатов* устанавливается посредством фиксации той группы моделей, в пределах которой ищется наиболее подходящая. На этом этапе знание формальных свойств моделей следует соединить с априорным знанием, инженерным искусством и интуицией. Иногда множество моделей становится результатом тщательного моделирования, после чего с использованием физических законов формируется модель, включающая физические параметры с еще не определенными значениями. Другая возможность состоит в том, чтобы использовать стандартные линейные модели, которые могут рассматриваться как результат линеаризации нелинейных моделей физических процессов. Часто оказывается полезным не задавать структуру (порядок) линейной модели заранее, на основе физических соображений, а получать наряду с остальными параметрами в результате идентификации. Множества моделей, у которых параметры рассматриваются как средства "подстройки" моделей к располагаемым экспериментальным данным и не отражают физики процесса, называются "*черными ящичками*", а множества моделей с настраиваемыми параметрами, допускающим физическую интерпретацию, называются "*серыми ящичками*".

Определение наилучшей модели из выбранного множества на основе имеющихся данных и собственно является *процедурой идентификации*. В результате выполнения всех трех

этапов идентификации получается некоторая конкретная модель, которая по выбранному критерию воспроизводит данные наблюдений. Далее требуется выполнить *процедуры подтверждения (валидации) модели* – оценивания соответствия модели данным наблюдений, априорной информации и поставленной прикладной цели.

Хорошее функционирование модели по указанным критериям создает определенную степень доверия к ней, а неудовлетворительное функционирование приводит к отказу от полученной модели. Имеется ряд причин несовершенства моделей: – численный метод не позволяет найти наилучшую модель по данному критерию; – критерий выбран неудачно; – множество моделей ”неполноценно” в том смысле, что в нем нет подходящего описания системы; – множество данных наблюдения недостаточно информативно для того, чтобы обеспечить выбор хороших моделей.

Отказ от модели приводит к пересмотру некоторых шагов процедуры идентификации, что обуславливает ее итеративный характер. Полезным инструментом здесь является диалоговое программное обеспечение [72, 81, 82, 87, 139].

Отметим, что во многих случаях реализация процедуры подтверждения модели оказывается неосуществимой, или затруднительной. В первую очередь это относится к системам адаптивного управления, в которых идентификация проходит в темпе с управляемым процессом и служит для настройки параметров регулятора при нормальной эксплуатации системы.

Перейдем непосредственно к описанию методов и алгоритмов идентификации систем непрерывного времени.

### 12.6.2. Идентификации с явной настраиваемой моделью

Рассмотрим алгоритм настройки модели для системы с полностью измеряемым вектором состояния

$$\dot{x}(t) = A_*x(t) + B_*u(t), \quad (12.53)$$

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ . Используем явную настраиваемую модель, имеющую вид

$$\dot{x}_M(t) = Gx_M(t) + (A(t) - G)x(t) + B(t)u(t), \quad (12.54)$$

где  $x_M(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния модели,  $G$  – некоторая  $n \times n$ -матрица.

Определим цель управления  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t = 0$ ,

где  $Q_t \triangleq \frac{1}{2} \epsilon(t) P \epsilon(t)^T$ ,  $\epsilon(t) \triangleq x_M(t) - x(t)$ ,  $P = P^T > 0$ . Очевидно,

$$\dot{Q}_t = \epsilon(t)^T P (G \epsilon(t) + (A(t) - A_*) x(t) + (B(t) - B_*) u(t)). \quad (12.55)$$

Вычисляя скоростной градиент, получим алгоритм идентификации в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt} A(t) = -\gamma P \epsilon(t) x(t)^T, \quad \frac{d}{dt} B(t) = -\gamma P \epsilon(t) u(t)^T. \quad (12.56)$$

Для выполнения условия достижимости (А.10) матрица  $P$  должна удовлетворять *неравенству Ляпунова*  $PG + G^T P < 0$ . Тогда при ограниченном  $x(t)$  (что имеет место, например, для устойчивого объекта с ограниченным управлением) удовлетворяется цель  $Q_t \rightarrow 0$ .

Для рассматриваемой задачи существенно выполнение более сильной цели:

$$A(t) \rightarrow A_*, \quad B(t) \rightarrow B_*, \quad (12.57)$$

которая означает сходимость оценок к истинным значениям параметров. Как следует из 13.5.3. (см также приложение А.), для этого достаточно (при выполнении указанных выше условий достижимости) *интегральной невырожденности* вектор-функции  $\text{col}\{x(t), u(t)\}$ .<sup>16</sup> Например, цель (12.57) достигается, если объект (12.53) полностью управляем, а спектр функции  $u(t)$  содержит не менее  $n$  гармоник.

### 12.6.3. Идентификация на скользящих режимах

Рассмотрим линейный объект (12.53) и настраиваемую модель

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + v(t), \quad (12.58)$$

где матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  должны быть получены по измеряемым вектору состояния  $x(t)$  и входу  $u(t)$ ;  $v(t)$  есть *дополнительный*

<sup>16</sup> Говорят также, что данная функция является *постоянно возбуждающей*, или что система подвержена *неисчезающему возбуждению* (см. также с. 412).

сигнал, введение которого обеспечивает скользящий режим на многообразии  $\sigma = 0$ , где  $\sigma \triangleq x(t) - \tilde{x}(t)$ .

Основываясь на схеме скоростного градиента с целевой функцией  $Q_t \triangleq \frac{1}{2}\sigma^T \sigma$ , получим

$$\dot{Q}_t = \sigma^T ((A - \tilde{A}(t))x(t) + (B - \tilde{B}(t))u(t) - v(t)), \quad (12.59)$$

Возьмем в качестве вектора настраиваемых параметров  $\theta \triangleq \text{col}\{\tilde{A}, \tilde{B}, v\}$ . Получим алгоритм идентификации на скользящих режимах в конечно-дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{A}(t) &= -\gamma\sigma(t)x(t)^T, \\ \frac{d}{dt}\tilde{B}(t) &= -\gamma\sigma(t)u(t)^T, \\ v(t) &= -\gamma_1\text{sign}\sigma(t), \quad \text{где } \sigma(t) = x(t) - \tilde{x}(t), \quad \gamma, \gamma_1 > 0. \end{aligned} \quad (12.60)$$

Алгоритмы идентификации такого типа рассмотрены, например, в [102]. Условия сходимости оценок параметров к их истинным значениям аналогично рассмотренным в предыдущем параграфе.

#### 12.6.4. Идентификация с неявной настраиваемой моделью

Рассмотренные выше алгоритмы параметрической идентификации, в принципе, позволяют получить оценки матриц уравнений состояния объекта, но при этом предполагается, что весь вектор состояния объекта доступен измерению (и, кроме того, выполнено условие "неисчезающего возбуждения").

На практике возможность измерения полного вектора состояния обычно отсутствует, поэтому актуальной является задача получения алгоритмов идентификации, основанных на измерении только выхода и входа объекта управления. Некоторые методы такого типа рассмотрены в данном и следующем параграфах.

Рассмотрим SISO-объект управления (стационарный и линейный). Поскольку при синтеза регулятора выбор базиса уравнений состояния для SISO систем несуществен, можем ограничиться моделью объекта в виде входо-выходных соотношений, т.е. его передаточной функцией  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  и идентифицировать коэффициенты многочленов  $A(s), B(s)$ .

Итак, рассмотрим модель объекта в виде дифференциального уравнения

$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \quad (12.61)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования, операторные многочлены  $A(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i$ ,  $B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$ , ( $m \leq n$ ) содержат  $n + m + 1$  неизвестных параметров  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ ,  $j = 0, \dots, m$ .

Требуется провести идентификацию этих параметров, используя только измерения  $u(t)$ ,  $y(t)$ .

Для решения задачи можно ввести два дополнительных "фильтра состояния" – звена с передаточными функциями  $W_f(s) \triangleq \frac{1}{G(s)}$ , где  $G(s)$  – некоторый гурвицев многочлен, причем  $\deg G(s) \geq n - 1$ .

Подавая на входы фильтров  $W_f(s)$  сигналы  $u(t)$  и  $y(t)$  с выходов, получаем "отфильтрованные" процессы  $u_f(t)$  и  $y_f(t)$ , которые являются решениями уравнений

$$G(p)y_f(t) = y(t), \quad G(p)u_f(t) = u(t). \quad (12.62)$$

Сформируем сигнал "невязки" (ошибки) модели

$$\sigma(\theta, t) = \hat{A}(s, \theta)y_f(t) - \hat{B}(s, \theta)u_f(t). \quad (12.63)$$

Здесь вектор настраиваемых параметров  $\theta$  состоит из оценок коэффициентов  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ ,  $j = 0, \dots, m$ , т.е.  $\theta \triangleq [\hat{a}_{n-1}, \dots, \hat{a}_0, \hat{b}_m, \dots, \hat{b}_0]^T$ . Многочлены  $\hat{A}(s, \theta)$ ,  $\hat{B}(s, \theta)$  описывают невязную настраиваемую модель. Эта модель не входит в систему как динамическое звено, а присутствует в виде своих коэффициентов. (Заметим, что близкая ситуация имеет место для большинства методов идентификации дискретных систем). Указанные операторные многочлены имеют вид

$$\hat{A}(p, \theta) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i p^i, \quad \hat{B}(p, \theta) = \sum_{i=0}^m \hat{b}_i p^i, \quad (12.64)$$

Основываясь на методе скоростного градиента, получаем следующий алгоритм идентификации [171]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{a}_i(t) &= -\gamma \sigma(t) y_f^{(i)}(t)^T, \quad i = 0, \dots, n - 1, \\ \frac{d}{dt} \hat{b}_j(t) &= -\gamma \sigma(t) u_f^{(j)}(t)^T, \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (12.65)$$

Здесь  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления алгоритма,  $\sigma(t)$  определяется выражением (12.63), а сигналы  $u_f(t)$ ,  $y_f(t)$  – уравнениями (12.62). Заметим, что для реализации алгоритма не требуется дифференцировать сигналы  $u_f(t)$ ,  $y_f(t)$ , так как производные  $y_f^{(i)}(t)$ ,  $u_f^{(j)}(t)$  могут быть получены как ”промежуточный сигнал” фильтров без дифференцирования.

#### 12.6.5. Адаптивные наблюдатели

Аналогичный по постановке рассмотренному выше алгоритм *адаптивных наблюдающих устройств* предназначен для совместного решения взаимосвязанных проблем идентификации параметров (при недостаточной текущей информации о состоянии объекта) и оценивания состояния (при недостаточной априорной информации о его параметрах).

В 8.2. (с. 183) описаны наблюдающие устройства, позволяющие при наличии достаточно точной модели объекта (который предполагается полностью наблюдаемым) получить асимптотическую оценку состояния по измерениям только входа и выхода.

В [2, 7, 116] описаны адаптивные наблюдатели, в которых процесс оценивания состояния совмещен с процедурой идентификации параметров.<sup>17</sup> Рассмотрим один из таких алгоритмов более подробно.

Пусть имеется линейный SISO-объект. Преобразуем его уравнения состояния к специальному базису (см. 1.8.), в котором матрицы  $A, B, C$  имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_2 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & -\lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (12.66)$$

$$C = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

Здесь  $\lambda_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) – заданные константы;  $a_j$ ,  $b_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) – подлежащие идентификации неизвестные параметры объекта.

<sup>17</sup> Различные адаптивные наблюдатели предложены также в работах [134, 165, 166, 167, 173, 179].

Адаптивное наблюдающее устройство описывается уравнением

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\hat{A}(t) - LC)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + Ly(t), \quad (12.67)$$

где  $\hat{A}(t)$  – матрица оценки  $A$ ;  $\hat{B}(t) \in \mathcal{R}$  – вектор оценки  $B$ , вектор-столбец  $L = [\hat{a}_1(t) - \lambda_1, \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_n(t)]^T$ ;  $\lambda_1$  – заданная константа;  $\sigma(t) \in \mathcal{R}^n$  – так называемый *дополнительный сигнал ошибки*, формируемый с помощью системы фильтров.

Алгоритм настройки параметров наблюдателя  $\hat{A}(t)$ ,  $\hat{B}(t)$  имеет вид алгоритмов скоростного градиента и здесь не приводится [2]. Этот алгоритм можно получить исходя из общей идеи, лежащей в основе рассматриваемых здесь адаптивных наблюдателей и описанного выше в 12.6.4. алгоритма Лайона [171] идентификации с неявной настраиваемой моделью [7].

Действительно, рассмотрим дифференциальное уравнение, записанное в операторной форме:

$$(p + \lambda_1)(p + \lambda_2) \cdots (p + \lambda_n)y(t) + \alpha_n(p + \lambda_1) \cdots (p + \lambda_{n-1})y(t) + \cdots \\ \cdots + \alpha_1 y(t) = \alpha_n(p + \lambda_1) \cdots (p + \lambda_{n-1})u(t) + \cdots + \alpha_1 u(t), \quad (12.68)$$

где  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  – заданные константы;  $p = \frac{d}{dt}$ .

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в (12.68), нетрудно получить (при  $m < n$ ) систему линейных уравнений для  $\alpha_j$ ,  $\alpha_j$  из условия совпадения передаточной функции системы (12.68) с исходной передаточной функцией

$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , числитель и знаменатель которой имеют вид

$$A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i, B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i \text{ (ср. с (12.61)).}$$

Такое преобразование фактически означает переход в пространстве многочленов [3] от степенного базиса  $1, s, s^2, \dots, s^n$  к базису из многочленов  $1, s + \lambda_1, (s + \lambda_1)(s + \lambda_2), \dots, (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n)$ , или, что то же самое, переход от реализации системы в виде набора интегрирующих звеньев к набору апериодических звеньев.

Введем настраиваемую модель, структура которой определяется (12.68), а вместо  $\alpha_j$ ,  $\alpha_j$  взяты настраиваемые параметры  $\hat{\alpha}_j(t)$ ,  $\hat{\alpha}_j(t)$ . Аналогично (12.63) определим *невязку* модели, используя в качестве фильтрующего многочлен

$$G(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \delta(t) = & y(t) + \frac{\hat{\alpha}_n(t)}{s + \lambda_n} y(t) + \frac{\hat{\alpha}_{n-1}(t)}{(s + \lambda_n)(s + \lambda_{n-1})} y(t) + \dots \\ & + \frac{\hat{\alpha}_1(t)}{(s + \lambda_n) \dots (s + \lambda_1)} y(t) - \frac{\hat{\alpha}_n(t)}{s + \lambda_n} u(t) - \\ & - \frac{\hat{\alpha}_{n-1}(t)}{(s + \lambda_n)(s + \lambda_{n-1})} u(t) - \dots - \frac{\hat{\alpha}_1(t)}{(s + \lambda_n) \dots (s + \lambda_1)} u(t). \end{aligned} \quad (12.69)$$

Каждое слагаемое в правой части (12.69) может быть получено в результате последовательного ”пропускания” сигналов  $u(t)$ ,  $y(t)$  через цепочку (”каскад”) фильтров с передаточными функциями  $\frac{1}{s + \lambda_i}$ .

Используя метод скоростного градиента с целевой функцией  $Q_t = \frac{1}{2} \delta^2$ , получим алгоритм адаптации (идентификации)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_i &= -\gamma \delta(t) \tilde{y}_i(t), \\ \frac{d}{dt} \alpha_i &= -\gamma \delta(t) \tilde{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (12.70)$$

где  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $\tilde{u}_i(t)$  – сигналы на выходах звеньев фильтрующей цепи.

Отличие алгоритма (12.69), (12.70) от (12.62)–(12.65) заключается в различном способе формирования дополнительных сигналов ошибки (переменных  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $\tilde{u}_i(t)$ ). В алгоритме (12.62)–(12.65) переменная  $\tilde{y}_i(t)$  является  $i$ -й производной от  $\tilde{y}_1(t)$ , а в (12.69)  $\tilde{y}_i(t)$  получается пропусканием  $y(t)$  через цепочку из  $i$  фильтрующих апериодических звеньев. Другими словами, в (12.69) выбран иной базис для реализации фильтров состояния. Заметим, что для получения оценок  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  коэффициентов знаменателя и числителя передаточной функции объекта  $W(s)$  по алгоритму (12.70) требуется выполнять пересчет оценок  $\hat{\alpha}_j(t)$ ,  $\hat{\beta}_j(t)$ , в то время, как алгоритм (12.65) дает оценки  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  непосредственно.

Для использования адаптивных наблюдателей в замкнутых системах управления, как и других идентификационных алгоритмов, имеется ряд препятствий.

Во-первых, из сходимости оценки состояния не следует, вообще говоря, асимптотическая сходимость оценок параметров к их истинным значениям. Как и в других алгоритмах, для этого требуется наличие ”неисчезающего возбуждения”, требуется, чтобы объект достаточно полно возбуждал-

ся входным сигналом. Для замкнутых систем следует применять дополнительные меры обеспечения этого условия. Кроме того, на процесс идентификации могут сильно влиять помехи в системе. Наконец, использование оценок состояния в законе управления затрудняется тем, что в адаптивных наблюдателях они получаются в некотором специальном базисе, пересчет от которого к заданному (исходному) базису зависит от параметров объекта; оценки последних, как отмечено выше, могут значительно отличаться от истинных значений.

### **12.7. Адаптивное управление с идентификацией на скользящих режимах. Метод шунтирования**

В данном параграфе изложен метод синтеза адаптивных систем с *параллельным компенсатором* ("шунтом") для управления неустойчивыми или/и неминимально-фазовыми объектами на основе идентификации при осуществлении в системе скользящих режимов.

В последние годы появилось значительное число публикаций, посвященных разработке методов адаптивного управления объектами, математическая модель которых имеет неизвестный относительный порядок и при измерении только выхода объекта (а не его производных), см. [39, 69]. Недостатком известных методов является сложность (высокий порядок) предлагаемых алгоритмов, которая затрудняет их реализацию и снижает помехоустойчивость. Некоторые более простые алгоритмы предложены в [69] и описаны в книге [64]. На преодоление этого недостатка направлен также разработанный в [107, 120, 122] *метод шунтирования*, основанный на использовании параллельного компенсатора (шунтирующего звена, или "шунта"). Основная идея метода заключается в обеспечении свойства строгой минимально-фазовости (СМФ) расширенного объекта (включающего собственно объект управления и компенсатор [64, 107, 164]). В [124, 125] предложен упрощенный метод синтеза, который позволяет решить задачу модального управления объектом в условиях параметрической неопределенности без использования точного значения относительного порядка модели объекта и не зависит от уровня неучтенных при синтезе факторов.

В данном параграфе изложены приведенные в [122] резуль-

таты по совместному использованию метода шунтирования, скользящих режимов и процедуры идентификации.

### 12.7.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейный стационарный объект управления со скалярным управлением и выходом, уравнения состояния которого имеют вид

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t), \quad y_p(t) = C_p x_p(t), \quad (12.71)$$

где  $x_p(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}$ ,  $y_p(t) \in \mathcal{R}$ . Передаточная функция объекта (12.71) имеет вид

$$W_p(s) = C_p (sI_n - A_p)^{-1} B_p = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (12.72)$$

где  $s \in \mathcal{C}$  – аргумент,  $\deg A(s) = n$ ,  $\deg B(s) = m$ ,  $k = n - m$  – *относительный порядок объекта*. Полагаем, что  $W_p(0) > 0$ ,  $k > 1$ .

Рассмотрим задачу адаптивного управления объектом при существенной априорной неопределенности его параметров. Кроме того, считаем, что измерению доступен только выход  $y(t)$  (а не его производные). Пусть требуется, чтобы поведение замкнутой системы отвечало следующему уравнению (см. также [74, 124])

$$A_m(p)y_p(t) = KB(p)r(t), \quad (12.73)$$

где  $r(t)$  – задающее (командное) воздействие,  $p$  – оператор дифференцирования ( $p = \frac{d}{dt}$ );  $A_m(s)$  – произвольный заданный гурвицев многочлен степени  $n$ ;  $K = \frac{A_m(0)}{B(0)}$ . Уравнение (12.73) соответствует рассмотренной ранее неявной эталонной модели [104, 120] и приводит к менее жестким ограничениям на поведение системы, чем явная эталонная модель. Параметр  $K$  вводится для обеспечения астатизма системы.

Для достижения цели (12.73) обеспечим точное слежение за преобразованным командным сигналом  $y_f(t)$ , который вырабатывается настраиваемым пре-фильтром, уравнения которого приводятся ниже. Эта задача может быть решена путем организации движения в скользящем режиме [102]. Можно показать, что условие строгой минимально-фазовости (см.

[103, 104] и 12.1. сноску на с. 304) достаточно как для обеспечения скользящего режима, так и для решения задачи прямого адаптивного управления с эталонной моделью. В данной задаче выполнение этого условия не предполагается. Возникающих при этом трудностей можно избежать введением *параллельного компенсатора* ("шунта", см. [123, 164, 177]), что позволяет обеспечить выполнение указанного условия для расширенного объекта, включающего собственно объект управления и шунт.

Обозначим передаточную функцию шунта через

$$W_c(s) = \frac{B'(s)}{A'(s)}, \quad \deg A'(s) = n'.$$

Выход расширенного объекта  $y(t) = y_p(t) + y_c(t)$ . Передаточная функция расширенного объекта от  $u$  к  $y$  имеет вид

$$W(s) = W_p(s) + W_c(s) = \frac{F(s)}{A(s)A'(s)}, \quad (12.74)$$

где  $F(s) = A(s)B'(s) + A'(s)B(s)$ . Для обеспечения слежения за  $r(t)$  с заданной динамикой заметим, что выход расширенного объекта  $y(t)$  не совпадает с выходом объекта управления  $y_p(t)$  и идеальное слежение of  $y(t)$  за  $y_f(t)$  не означает того же самого для  $y_p(t)$ . Отсюда определяются условия для выбора пре-фильтра. Получим передаточную функцию  $W_r(s)$  от  $r(t)$  к  $y_p(t)$ , предполагая, что  $y(t) \equiv y_f(t)$ . Учитывая (12.74) и уравнение шунта получим, что

$$W_r(s) = W_f(s) \frac{B(s)A'(s)}{F(s)}, \quad (12.75)$$

где  $W_f(s)$  – передаточная функция пре-фильтра. Из (12.73), (12.75) следует что цель управления будет достигнута, если  $y(t) \equiv y_f(t)$  и если  $W_f(s)$  взять в виде

$$W_f(s) = \frac{KF(s)}{A_m(s)A'(s)}, \quad (12.76)$$

где  $K = \frac{A_m(0)}{B(0)}$ .

Заметим, что (12.76) в неадаптивном случае описывает фильтр с постоянными параметрами. При неопределенности

параметров объекта вместо (12.76) следует использовать настраиваемый пре-фильтр, задаваемый уравнениями

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f r(t), \quad y_f(t) = \Omega^T(t) x_f(t), \quad (12.77)$$

где  $x_f(t) \in \mathcal{R}^N$ ;  $\Omega(t) \in \mathcal{R}^N$  – вектор настраиваемых параметров:  $\Omega(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_N(t)]^T$ ,  $N = n + n'$ . Матрицы  $A_f$ ,  $B_f$  запишем в канонической форме фазовой переменной (УКП, с. 74). Номинальное значение  $\Omega(t) \equiv \Omega_*$  зависит от параметров объекта и должно удовлетворять (12.76) для передаточной функции  $W_f(s) = \Omega_*^T (sI - A_f)^{-1} B_f$ . В выбранном каноническом базисе выполнено  $F(s) = \sum_{i=1}^N \omega_i^* s^{N-i}$ . Отсюда получаем систему линейных уравнений для номинальных значений:  $\omega_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i^* s^{N-i} = K(A(s)B'(s) + A'(s)B(s)). \quad (12.78)$$

Эти значения зависят от неизвестных параметров объекта, оценки которых могут быть получены с помощью алгоритма адаптивной идентификации, описанного в 12.7.2.

Для выбора шунта введем следующую передаточную функцию [107]:

$$W_c(s) = \frac{\kappa \varepsilon (\varepsilon s + 1)^{k-2}}{(s + \lambda)^{k-1}}, \quad \lambda > 0. \quad (12.79)$$

Ниже сформулированы свойства расширенного объекта (12.74) с шунтом (12.79) [107].

1. Пусть  $W_p(s)$  (12.72) – минимально-фазовая ( $B(s)$  – гурвицев многочлен), имеет относительный порядок  $k > 1$  и  $W_p(0) > 0$ . Тогда существуют параметр  $\kappa_0 > 0$  и функция  $\varepsilon_0(\kappa) > 0$  такая, что передаточная функция  $W(s) = W_p(s) + W_c(s)$  – строго минимально-фазовая (СМФ) для всех  $\kappa > \kappa_0$  и  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\kappa_0)$ .

2. Пусть  $W_p(s)$  – устойчивая ( $A(s)$  – гурвицев многочлен), имеет относительный порядок  $k > 1$  и  $W_p(0) > 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует достаточно большое значение  $\kappa_0$  такое, что  $W(s) = W_p(s) + W_c(s)$  – СМФ для всех  $\kappa \geq \kappa_0$ .

Таким образом, можно ввести шунт (12.79) порядка

$\deg(A_s(s)) = k - 1 = n - m - 1$ , который при достаточно большом  $\kappa$  и малом  $\varepsilon$  обеспечивает условие СМФ для расширенного объекта (12.74) при любом минимально-фазовом объекте управления и произвольной заданной области параметров. Как следует из утверждения 2, при другом способе выбора параметров шунта (12.79), условие СМФ выполняется для устойчивых (и, возможно, неминимально-фазовых) объектов. В этом случае уравнение шунта можно упростить; именно вместо (12.79) можно взять  $W_c(s) = \frac{\kappa}{s + \lambda}$ .

Предположим теперь, что шунт (12.79) выбран надлежащим образом и расширенный объект (12.74) удовлетворяет условию СМФ. Перепишем уравнения расширенного объекта в следующей канонической форме [102, 189]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (12.80)$$

где  $x_1(t) \in \mathcal{R}^{N-1}$ ,  $x_2(t) \in \mathcal{R}$  и  $y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  – измеряемый выход,  $c_2b > 0$ ;  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $b$  – неизвестные параметры,  $C = [c_1, c_2]$ .

Таким образом, в рассматриваемой задаче требуется найти управляющее воздействие  $u(t)$  и закон настройки  $\Omega(t)$  в (12.77) такой, что для любого данного значения относительного порядка  $k$  объекта управления, его выход асимптотически удовлетворяет (12.73).

Задача может быть решена в два этапа. Первый этап состоит в разработке алгоритма идентификации параметров и обеспечении их сходимости к истинным значениям.

Второй этап состоит в выборе управления  $u(t)$ , обеспечивающего сходимость  $\sigma(t) = y(t) - y_f(t)$  к нулю за конечное время.

### 12.7.2. Алгоритм настройки параметров

В данном параграфе представлен алгоритм идентификации, близкий к рекуррентной процедуре метода наименьших квадратов и использующий только измерения входа и выхода объекта. Первым шагом является разработка фильтров, введение которых позволяет избежать измерения производных от выхода объекта.

Запишем уравнение объекта управления (12.72) в виде

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = \\ = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_m u(t), \end{aligned} \quad (12.81)$$

где  $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  – неизвестные параметры объекта (верхний индекс  $n$  означает  $n$ -ю производную по времени от сигнала). Перепишем уравнения объекта в следующем виде

$$y^{(n)}(t) = \varphi^T(t) \theta^*, \quad (12.82)$$

где  $\varphi(t) = [y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^m(t), \dots, u(t)]^T$ ,  $\theta^* = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n, b_0, b_1, \dots, b_m]^T$ ,  $\varphi(t), \theta^* \in \mathcal{R}^{n+m+1}$ . Введем переменные  $\tilde{y}(t)$ ,  $\tilde{\varphi}(t)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$D(p)\tilde{y}^{(n)}(t) = y^{(n)}(t), \quad D(p)\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t),$$

где  $D(p) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n$  – произвольный гурвицев многочлен,  $p \equiv \frac{d}{dt}$ . Из (12.82) следует, что

$$\tilde{y}^{(n)} = \tilde{\varphi}^T(t) \theta^* \quad , \quad (12.83)$$

Сигналы  $\tilde{y}(t)$ ,  $\tilde{\varphi}(t)$  могут быть получены с помощью системы фильтров

$$\dot{\xi}(t) = A_d \xi(t) + b_d y(t), \quad \dot{\psi}(t) = A_d \psi(t) + b_d u(t),$$

где  $\xi(t), \psi(t) \in \mathcal{R}^n$ ;  $A_d, b_d$  имеет каноническую форму фазовой переменной,  $\det(sI - A_d) = D(s)$ . Заметим, что как  $\xi$ , так и  $\psi$  могут быть получены на основе только измерений входа и выхода объекта управления. Очевидно, что

$$\tilde{\varphi}(t) = [\xi_n(t), \dots, \xi_2(t), \xi_1(t), \psi_{m+1}(t), \dots, \psi_1(t)]^T,$$

$$\tilde{y}^{(n)}(t) = y(t) - \sum_{i=1}^n d_{n-i+1} \xi_i(t) .$$

Запишем теперь алгоритм идентификации в виде [122]

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= -\Gamma(t) \tilde{\varphi}(t) \tilde{\varphi}^T(t) (\theta^T(t) - \theta^*(t)) = \\ &= -\Gamma(t) \tilde{\varphi}(t) \tilde{\varphi}^T(t) \theta^T(t) + \Gamma(t) \tilde{\varphi}(t) \xi(t), \end{aligned} \quad (12.84)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t) \tilde{\varphi}(t) \tilde{\varphi}^T(t) \Gamma(t) + (\Gamma(t) - \frac{1}{k_0} \Gamma^2(t)), \quad (12.85)$$

где  $k_0 I > \Gamma(0) = \Gamma(0)^T > 0$ , через  $\tilde{\xi}(t)$  обозначена  $\tilde{y}^{(n)}(t)$ .

Доказательство сходимости параметров  $\tilde{\varphi}(t)$  использует предположение, что система подвержена неисчезающему возбуждению со стороны сигнала управления  $u(t)$ .

В литературе описаны и другие алгоритмы идентификации, основанные не методе наименьших квадратов. Например, [23, 106], можно использовать алгоритм

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= -\Gamma(t)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}^T(t)\theta^T(t) + \Gamma(t)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\xi}(t), \\ \dot{\Gamma}(t) &= -\Gamma(t)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}^T(t)\Gamma(t) + \alpha\Gamma(t),\end{aligned}\quad (12.86)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр алгоритма.

Следующим шагом является выбор закона управления.

### 12.7.3. Выбор закона управления

Получим закон управления, обеспечивающий скользящий режим на поверхности  $\sigma = y - y_f = 0$ . Для этого, используя (12.80), представим уравнение ошибки в виде

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= c_1\dot{x}_1(t) + c_2\dot{x}_2(t) - \dot{y}_f(t) = \\ &= c_1A_{11}x_1(t) + \\ &+ c_1A_{12}x_2(t) + c_2A_{21}x_1(t) + c_2A_{22}x_2(t) + c_2bu(t) - \dot{y}_f(t).\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$x_2(t) = \frac{1}{c_2}(\sigma(t) + y_f(t) - c_1x_1(t))\quad (12.87)$$

после подстановки (12.87) в (12.80) получим

$$(c_2b)^{-1}\dot{\sigma}(t) = Lx_1(t) + a_1\sigma(t) + a_1y_f(t) - (c_2b)^{-1}\dot{y}_f(t) + u(t),\quad (12.88)$$

где  $L - 1 \times (N - 1)$ -вектор;

$$L = (c_2b)^{-1} \left( c_1A_{11} + c_2A_{21} - \frac{c_1A_{12} + c_2A_{22}}{c_2}c_1 \right),$$

$$a_1 = \frac{1}{c_2(c_2b)}(c_1A_{12} + c_2A_{22}).$$

Представим теперь модель ошибки для  $x_1(t)$ . Подставляя (12.87) в (12.80), получим

$$\dot{x}_1(t) = A_*x_1(t) - \frac{A_{12}}{c_2}\sigma(t) + \frac{A_{12}}{c_2}y_f(t),\quad (12.89)$$

где  $A_* = A_{11} - A_{12} \frac{c_1}{c_2}$ . Уравнения (12.77), (12.88), (12.89) описывают модель ошибки. Учтем, что расширенный объект обладает свойством СМФ. Это означает [191], что  $A_*$  – гурвицева матрица и  $c_2 b > 0$ . Важно отметить, что  $y_f(t)$  ограничено ( $|y_f(t)| \leq \bar{y}_f$ ) вследствие гурвицевости  $A_f$  и ограниченности  $r(t)$ ,  $\theta_f(t)$ .

Выберем теперь сигнал управления в виде

$$u(t) = -k_s \sigma(t) - \gamma \text{sign}(\sigma(t)), \quad (12.90)$$

где  $k_s$  и  $\gamma$  – положительные параметры. Управление (12.90) обеспечивает существование у системы устойчивого скользящего режима на поверхности  $\sigma = 0$ . Заметим, что устойчивость системы может быть обоснована путем последовательного применения двух функций Ляпунова [191]:

$$V_1 = \frac{1}{2}(cb)^{-1} \sigma^2 + \frac{1}{2} x_1^T P x_1, \quad V_2 = \frac{1}{2}(cb)^{-1} \sigma^2.$$

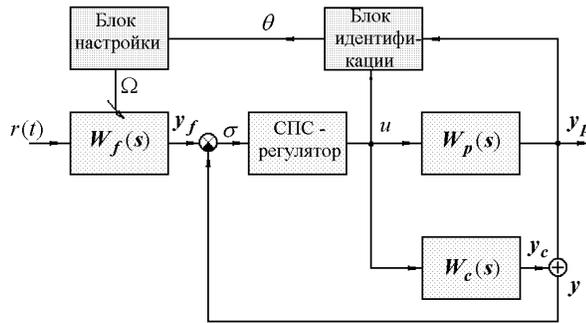


Рис. 12.8. Структурная схема адаптивной системы.

Структурная схема адаптивной системы управления представлена на рис. 12.8.

#### 12.7.4. Пример. Адаптивное управление летательным аппаратом

В качестве примера применения предложенного метода рассмотрим задачу управления движением летательного аппарата (ЛА) по тангажу. Пусть ЛА имеет постоянные, априорно-неопределенные параметры, значения которых лежат в

заданной ограниченной области. Заметим, что подобная ситуация может иметь место при полете на различных режимах, когда высота, скорость и нагрузка ЛА изменяются медленно по сравнению с темпом угловых движений. Для описания динамики углового движения ЛА используем следующие линеаризованные уравнения [23] (см. также п.п. 1.4.2. с. 29; 1.5.3. с. 41)

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \omega_z(t) + a_y^\alpha \alpha(t) + a_y^{\delta_b} \delta_b(t) , \\ \dot{\omega}_z(t) = -a_{m_z}^\alpha \alpha(t) - a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z(t) - a_{m_z}^{\delta_b} \delta_b(t) , \\ \dot{\vartheta}(t) = \omega_z(t) , \end{cases} \quad (12.91)$$

где  $\vartheta(t)$ ,  $\omega(t)$  – угол и угловая скорость тангажа,  $\alpha(t)$  – угол атаки,  $\delta_b(t)$  – угол отклонения рулей высоты;  $a_y^\alpha, a_{m_z}^\alpha, a_{m_z}^{\omega_z}, a_y^{\delta_b}, a_{m_z}^{\delta_b}$  – параметры ЛА. Их значения зависят от указанных выше факторов и могут изменяться в широких пределах в зависимости от высоты и скорости полета. Точные значения параметров априорно не определены. Предполагаем также, что динамикой исполнительного органа можно пренебречь и считать, что управлением является отклонение рулей  $\delta_b(t)$ . Считаем, что доступна измерению только регулируемая координата  $\vartheta(t)$ . Уравнениям (12.91) отвечает передаточная функция (12.72), где  $\deg A(s) = 3$ ,  $\deg B(s) = 1$ ,  $k = 2$ .

В данной задаче требуется обеспечить заданное поведение автопилотируемой системы управления ЛА в соответствии с эталонной моделью (12.73), где  $A_m(s) = p^3 + a_1^m p^2 + a_2^m p + a_3^m$ .

Коэффициенты уравнения объекта управления (12.81) связаны с параметрами модели ЛА (12.91) соотношениями

$$a_1 = a_{m_z}^{\omega_z} - a_y^\alpha, a_2 = a_{m_z}^\alpha - a_{m_z}^{\omega_z} a_y^\alpha, a_3 = 0, b_0 = -a_{m_z}^{\delta_b}, b_1 = a_{m_z}^{\delta_b} a_y^\alpha + a_y^{\delta_b} a_{m_z}^\alpha.$$

Очевидно, что здесь не требуется проводить оценивания  $a_3$ ; следовательно, можно уменьшить число оцениваемых параметров и упростить алгоритм идентификации.

В рассматриваемом примере относительный порядок объекта  $k = 2$  и шунт (12.79) может быть задан передаточной функцией  $W_c(s) = \frac{\kappa}{s + \lambda}$ , имеющей параметры  $\kappa > 0$ ,  $\lambda > 0$ .

Введем фильтры третьего порядка для входного и выходного процессов (12.76) в виде

$$\dot{x}_\vartheta(t) = A_d x_\vartheta(t) + b_d \vartheta(t), \quad \dot{x}_\delta(t) = A_d x_\delta(t) + b_d \delta_b(t), \quad (12.92)$$

где  $x_\vartheta(t), x_\delta(t) \in \mathcal{R}^3$ ,  $A_d, b_d$  имеют каноническую форму фазовой переменной,  $\det(sI - A_d) \equiv D(s) = s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3$ . Вектор  $\tilde{\varphi}(t)$  теперь можно записать в виде  $\tilde{\varphi}(t) = [x_{\vartheta,3}(t), x_{\vartheta,2}(t), x_{\delta,2}(t), x_{\delta,1}(t)]^T$ . Сигнал  $\tilde{\xi}(t)$  в (12.84) определяется выражением  $\dot{x}_{\vartheta,3}(t)$  и может быть найден из (12.92) через  $x_\vartheta(t), \vartheta(t)$  без дифференцирования. Компонентами вектора  $\theta(t) \in \mathcal{R}^4$  являются оценки соответствующих параметров передаточной функции ЛА  $-a_1, -a_2, b_0, b_1$ . В данном примере  $\Gamma(t)$  – матрица  $4 \times 4$ ,  $\Gamma(0) = k_0 I$ . Окончательно алгоритм идентификации имеет вид (12.84), (12.85):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= -\Gamma(t)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}^T(t)\theta^T(t) + \Gamma(t)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\xi}(t), \\ \dot{\Gamma}(t) &= -\Gamma(t)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}^T(t)\Gamma(t) + \left(\Gamma(t) - \frac{1}{k_0}\Gamma^2(t)\right). \end{aligned} \quad (12.93)$$

Рассмотрим теперь регулятор с переменной структурой. Введем расширенный выходной сигнал  $y_a(t) = \vartheta(t) + y_c(t)$ , где  $y_c(t)$  – выход шунтирующего звена и выберем сигнал управления в виде

$$\delta_b(t) = -k_s \sigma(t) - \gamma \operatorname{sign} \sigma(t), \quad (12.94)$$

где  $\sigma(t) = y(t) - y_f(t)$ ;  $y_f(t)$  – выход пре-фильтра (12.77).

Для достижения цели управления (12.73) найдем параметры пре-фильтра так, чтобы при выполнении предположения о сходимости оценок параметров ЛА в установившемся режиме к их истинным значениям уравнения пре-фильтра (12.77) удовлетворяли (12.76), где  $K = \frac{A_m(0)}{B(0)}$  и многочлен  $F(s) = A_p(s)B'(s) + A'(s)B_p(s)$ . Для данной системы получаем

$$F(s) = \kappa s^3 + (\kappa a_1 + b_0)s^2 + (\kappa a_2 + b_0\lambda + b_1)s + b_1\lambda \quad (12.95)$$

и знаменатель передаточной функции  $W_f(s)$  (12.76) – многочлен четвертой степени:

$$A_m(s)A'(s) = s^4 + (\lambda + d_1)s^3 + (\lambda d_1 + d_2)s^2 + (\lambda d_2 + d_3)s + \lambda d_3.$$

Окончательно получаем следующие уравнения настраивае-

мого пре-фильтра (12.77):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{f,1}(t) &= x_{f,2}(t), & \dot{x}_{f,2}(t) &= x_{f,3}(t), \\
\dot{x}_{f,3}(t) &= x_{f,4}(t), \\
\dot{x}_{f,4}(t) &= -\lambda d_3 x_{f,1}(t) - d_3 x_{f,2}(t) - (\lambda d_1 + d_2) x_{f,3}(t) - \\
&\quad - (\lambda + d_1) x_{f,4}(t) + r(t), \\
y_f(t) &= K(t) \sum_{i=1}^4 \omega_i(t) x_{f,i}(t), \\
\omega_1(t) &= \theta_4(t) \lambda, & \omega_2(t) &= \theta_4(t) + \lambda \theta_3(t) - \kappa \theta_2(t), \\
\omega_3(t) &= \theta_3(t) - \kappa \theta_1(t), & \omega_4 &= \kappa, \\
K(t) &= \frac{d_3}{\theta_4(t)}.
\end{aligned} \tag{12.96}$$

Проверим теперь выполнение условия СМФ для рассматриваемой системы. В данном случае числитель передаточной функции расширенного объекта (12.74)  $F(s)$  имеет вид (12.95) и должен быть гурвицевым многочленом третьей степени. Будем рассматривать ЛА, имеющие *нормальную аэродинамическую схему* [19, 23]. При этом коэффициенты числителя передаточной функции  $W_\theta^{\delta_b}$  отрицательны,  $b_0 < 0$ ,  $b_1 < 0$ . Отсюда вытекают следующие соотношения, которые должны выполняться для параметров ЛА и шунта:

$$\begin{aligned}
\kappa < 0, & \quad b_0 + \kappa a_1 < 0, & \quad \lambda b_0 + \kappa a_2 + b_1 < 0, \\
\lambda b_0^2 + \kappa \lambda a_1 b_0 + \kappa^2 a_1 a_2 + b_0 b_1 - \kappa \lambda b_1 &> 0.
\end{aligned} \tag{12.97}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим результаты использования рассмотренного адаптивного регулятора (12.94), (12.92), (12.96), (12.79) с алгоритмом идентификации (12.86) в задаче управления ЛА, численные значения параметров которого для различных режимов полета приведены в табл. 12.1.

Как видно из таблицы, параметры ЛА изменяются в широких пределах и режим 3 соответствует неустойчивому объекту.

При моделировании приняты следующие значения параметров алгоритмов управления и идентификации:

– характеристический многочлен эталонной модели

$$A_m(s) = s^3 + a_1^m s^2 + a_2^m s + a_3^m, \quad a_1^m = 14.2 \text{ с}^{-1}, a_2^m = 51 \text{ с}^{-2}, a_3^m = 90 \text{ с}^{-3}.$$

– параметры шунтирующего звена:  $\lambda = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\kappa = -2$ ;

– параметры фильтров (12.76):  $d_1 = 20 \text{ с}^{-1}$ ,  $d_2 = 200 \text{ с}^{-2}$ ,  $d_3 = 10^3 \text{ с}^{-3}$ ;

Таблица 12.1. Параметры модели ЛА

	$a_y^\alpha$	$a_{m_z}^\alpha$	$a_{m_z}^{\omega_z}$	$a_y^{\delta_B}$	$a_{m_z}^{\delta_B}$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$
$N^0$	$c^{-1}$	$c^{-2}$	$c^{-1}$	$c^{-1}$	$c^{-1}$	$c^{-2}$	$c^{-2}$	$c^{-2}$	$c^{-3}$
1	-1.10	15.5	1.20	0.09	33.0	2.3	16.8	-33	-35
2	-0.86	5.81	0.18	0.06	9.15	1.0	6.0	-9.2	-7.5
3	-1.34	-12.5	0.45	0.07	15.2	1.8	-12	-15.2	-21.2

– параметры регулятора с переменной структурой:  
 $k_s = 10$ ,  $\gamma = 3$ ;  
 – начальные значения в алгоритме идентификации:  
 $\Gamma(0) = k_0 I$ ,  $k_0 = 10^3$ ,  $\theta(0) = [0, 0, 0, -10.]$ ; параметр  $\alpha = 5$ ;

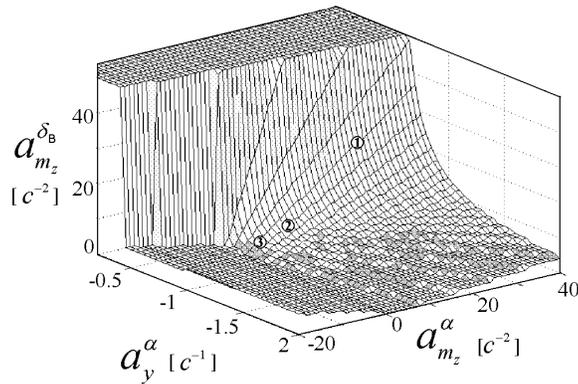


Рис. 12.9. Граница области СМФ для  $\eta = 0.5$ .

Неравенства (12.97) определяют область СМФ расширенного объекта, т.е. диапазон значений параметров ЛА, для которых применим закон управления (12.94). На рис. 12.9 показана область "ужесточенной" СМФ, для которой числитель передаточной функции расширенного объекта (12.74)  $F(s)$  имеет степень устойчивости  $\eta = 0.5$ .<sup>18</sup> При построении

<sup>18</sup> Напомним, что степенью устойчивости многочлена степени  $n$  называется величина  $\eta = -\max_i(\operatorname{Re} s_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  [15, 95, 76].

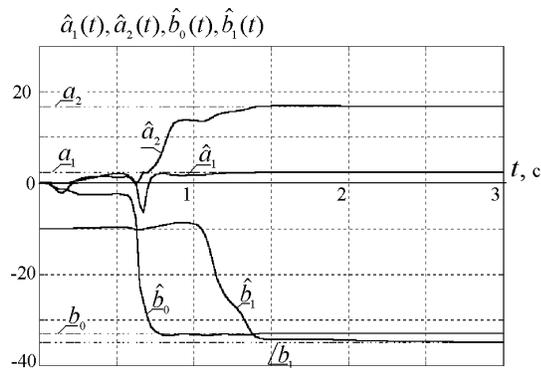


Рис. 12.10. Процесс идентификации параметров ЛА.

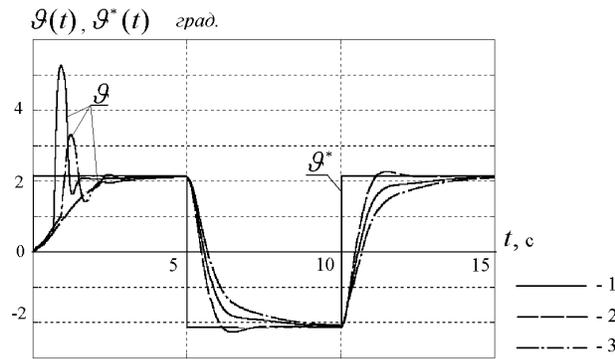


Рис. 12.11. Переходные процессы по углу тангажа ЛА.

области СМФ варьировались параметры  $a_y^\alpha$ ,  $a_{m_z}^\alpha$ ,  $a_{m_z}^\delta$ . Параметры  $a_y^{\delta_s} = 0.07 \text{ c}^{-1}$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z} = 0.18 \text{ c}^{-2}$ . Цифрами на рис. 12.9 обозначены точки, соответствующие строкам табл. 12.1.

Результаты моделирования приведены на рис. 12.10, 12.11.

Переходные процессы по углу тангажа при задающем воздействии  $r(t) \equiv \vartheta^*(t)$  в виде прямоугольной волны

$$\vartheta^*(t) = \vartheta_0^* \text{sign}(\sin(0.2\pi t)),$$

где  $\vartheta_0^* = 5$  град. для различных значений параметров из таблицы 12.1 приведены на рис. 12.10. На рис. 12.11 показаны графики оценок параметров ЛА для режима 1 (следует обра-

туть внимание на разницу масштабов времени). Результаты моделирования показывают достаточно высокую скорость настройки параметров регулятора. Некоторое отличие переходных процессов в системе по истечении времени адаптации связано с тем, что числитель передаточной функции замкнутой "эталонной" системы имеет нуль, совпадающий с нулем передаточной функции ЛА (см. (12.73), с. 340) и, следовательно, зависит от изменяющегося параметра  $a_y^\alpha$ .

## 12.8. Задачи и упражнения

1. а) Доказать, что в системе (12.16), (12.17) (с. 304), при достаточно большом  $\gamma > 0$  возникнет за конечное время скользящий режим, и будет достигнуто целевое условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} = 0$ , если передаточная функция  $W_u^\sigma(s)$  строго минимально фазовая.

У к а з а н и е. Рассмотреть функцию Ляпунова вида  $V(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T > 0$  и показать, что на множестве начальных условий  $\Omega_0 = \{x : V(x) \leq V_0\}$  (воспользоваться частотной теоремой с обратной связью, с. 321).

б) Доказать аналогичное утверждение для системы (12.19).  
У к а з а н и е. Рассмотреть функцию Ляпунова вида

$$V(x) = x^T P x + (K - K_*)^T \Gamma^{-1} (K - K_*)$$

для некоторых  $K_* \in \mathcal{R}^l$ ,  $P = P^T > 0$ .

2. Рассмотреть полином  $n$ -й степени  $P_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon A_n(\lambda) + B_{n-1}(\lambda)$ , где  $\deg A_n(\lambda) = n$ ,  $\deg B_{n-1}(\lambda) = n - 1$ ,  $B_{n-1}(0) > 0$ . Доказать, что если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то  $n - 1$  корней полинома  $P_\varepsilon(\lambda)$  стремятся к корням полинома  $B_{n-1}(\lambda)$ , а оставшийся корень стремится к  $-\infty$ .

3. Методы управления по измерениям выхода на основе СПС (п. 12.1) и адаптивных систем с неявной эталонной моделью (п. 12.5) распространяются на неминимально-фазовые объекты [103]. Это достигается применением их к расширенному объекту, полученному присоединением к входу цепочки интеграторов, выходы которых используются в законе управления.

а) Выписать уравнения синтезированных таким образом систем.

б) Пользуясь теоремой п. 12.5.1, получить условия применимости синтезированных систем.

4. Исследовать динамику систем управления по выходу, описанных в п.п. 12.1 и 12.5 компьютерным моделированием в условиях возмущений. Рассмотреть возмущения, действующие на вход (входные возмущения), на выход (помехи измерений), или действующие совместно (комбинированные). Для задания возмущающего сигнала использовать МАТЛАВ-функцию **rand**, генерирующую равномерно распределенные псевдослучайные числа.

5. Выполнить задания предыдущей задачи для адаптивной системы 12.5.1, в которой алгоритм адаптации (12.43) заменен регуляризованным алгоритмом

$$\dot{K}(t) = -\sigma(y(t))\Gamma y(t) - \alpha(K - \bar{K}), \quad \sigma(y) = g^T y, \quad (12.98)$$

где  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  - матрица коэффициентов усиления,  $\bar{K}$  - априорная оценка вектора "идеальных" коэффициентов регулятора,  $\alpha > 0$  - коэффициент регуляризации (огрубления).

Как зависит установившаяся ошибка системы от уровня возмущений и от параметров регулятора  $\alpha, \Gamma$  ?

## 13. УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ И ХАОТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

### 13.1. Задачи управления нелинейными колебаниями

В современных технических системах важную роль играют колебательные (т.е. обладающие той или иной степенью повторяемости) процессы. Колебательные режимы могут выступать не только как нежелательные, вредные режимы, но и в качестве основных, полезных режимов функционирования. В первом случае при разработке системы требуется подавлять нежелательные колебания, во втором – обеспечить поддержание заданного колебательного режима. Первый тип задач характерен для систем виброизоляции, подавления электрических и акустических помех, подавления упругих колебаний и вибраций в приборах, инструментах и другом оборудовании [27]. Задачи второго типа встречаются: при разработке вибрационного оборудования и вибрационных технологий [27]; различных машин и механизмов, рабочий орган которых совершает возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение [58], генераторов электрических или акустических колебаний и так далее.

Поскольку условия работы реальных систем и устройств всегда отличаются от расчетных, важным является вопрос о сохранении работоспособности системы при изменении условий ее работы, т.е. об устойчивости работы системы. Теоретическому анализу существования и устойчивости колебаний посвящена обширная литература (см. напр., [45, 11, 24, 55, 84]). Однако часто оказывается, что сама по себе система не обладает нужной степенью устойчивости и для ее нормальной работы необходимо прилагать дополнительные воздействия, т.е. вводить управление. В этих случаях возникают задачи синтеза, или управления колебаниями.

В конце XX в. возрос интерес к задачам управления нелинейными колебаниями в связи с появлением новых лазерных, химических, информационных технологий, сталкивающихся с нерегулярными, хаотическими колебаниями. Анализ материалов крупнейших мировых научных конференций показывает, что в начале XXI в. интерес к данной тематике будет продолжать расти. В настоящей главе рассмотрены некоторые результаты по управлению нелинейными колебатель-

ными системами, полученные в лаборатории "Управление сложными системами" Института проблем машиноведения РАН и опубликованные в 1994–1999 гг. [72, 128, 145, 150, 153].

Классификацию задач управления колебаниями можно проводить исходя из целей управления.

**1. Регулирование (стабилизация).** Подобные цели ставятся при подавлении шумов, вибраций различных конструкций, устранении нежелательных гармоник в системах связи, электронике и т.п. Этим вопросам посвящена обширная литература, в основном использующая методы линейной теории управления [27, 76, 155]. Особенность этих задач заключается в том, что объект управления является сильно колебательным, т.е. собственные числа матрицы линеаризованной системы близки к мнимой оси. Приведем, следуя [27], примеры приложений, в которых встречается задача подавления колебаний.

Витые пружины, нагруженные внешними периодическими силами, широко применяются в машинах в качестве основных силовых и вспомогательных элементов. Вредные, непредусмотренные вибрации пружин или потеря ими динамической устойчивости приводит к появлению паразитных колебаний рабочего органа машины, нарушению силового замыкания между отдельными ее звеньями и, как следствие – к уменьшению надежности машины, вплоть до ее аварийного выхода из строя.

В инженерной практике широко распространены конструкции, элементы которых имеют полости или отсеки, содержащие жидкость (например, объекты авиационной и космической техники, танкеры и плавучие топливозаправочные станции). Взаимное влияние отсека и жидкости при ее волновых движениях может сильно изменить степень устойчивости системы, а иногда порождать неустойчивость. Как пример можно указать резкое ухудшение остойчивости корабля при наличии "жидких" грузов и динамическую неустойчивость автоматически управляемых ракет-носителей и космических аппаратов с жидкостным ракетным двигателем при неправильном выборе структуры или параметров автомата стабилизации [19, 98].

Вибрации в металлорежущих станках снижают точность и качество обрабатываемых поверхностей, а также долговеч-

ность инструмента и элементов конструкции.

**2. Слежение (программное управление).** Во многих прикладных задачах требуется, чтобы выход объекта управления (ОУ) отслеживал некоторую заданную (программную) траекторию при наличии паразитных внутренних или внешних колебаний. Примерами являются задачи управления летательными аппаратами, роботами с учетом упругости конструкции (упругость является источником колебаний, препятствующих решению задачи). Во многих случаях требуется учитывать нелинейность моделей движения, например в задачах ориентации космических аппаратов, перемещения грузов на длинном тросе мостовыми кранами.

Решению подобных задач посвящен целый ряд работ, в которых развиты методы модального, оптимального и адаптивного управления [21, 22, 96, 48, 98, 111].

Перечисленные выше цели (регулирование и слежение) традиционны для теории и практики автоматического управления. Однако для задач управления колебаниями характерны также специфические цели.

**3. Возбуждение (раскачка, раскрутка, разгон) колебаний.** Цели этого класса возникают при управлении пусковыми режимами колебательных технических систем. Предполагается, что первоначально система находится в состоянии покоя и необходимо привести ее в колебательное движение с заданными характеристиками, причем траектория, по которой должен двигаться фазовый вектор системы, заранее не задана, неизвестна или не имеет значения для достижения цели.

Например, к возбуждению колебаний относится задача запуска вибрационной установки. Промышленные установки содержат один или несколько вибраторов – несбалансированных роторов с центром масс, смещенным относительно оси вращения. Каждый вибратор должен вращаться с большой угловой скоростью, вызывая вибрацию основания установки. При запуске требуемая мощность привода должна быть больше, чем в стационарном режиме, так как необходимо преодолевать силу тяжести. Представляет интерес возможность выбора управляющего момента привода в зависимости от положения ротора, т.е. в виде обратной связи, так, чтобы снизить требуемую мощность двигателя. В технических

системах применяются также вибраторы не вращательного, а возвратно-поступательного типа.

**4. Синхронизация.** Под *синхронизацией* явлений или процессов понимается согласованное во времени их протекание. Синхронизация имеет важные применения в вибрационной технике (синхронизация вибровозбудителей [16, 27]), в технике связи (синхронизация сигналов приемника и передатчика) [57, 114], в биологии и биотехнологиях и так далее. В 90-х годах появилось большое число публикаций посвященных управлению синхронизацией хаотических процессов и ее применению в системах передачи информации [181, 136, 156]. Хотя условия синхронизации неуправляемых нелинейных систем (самосинхронизации) детально изучены [56, 57, 27], методы управления синхронизацией остаются малоизученными. Частный случай синхронизации (координирования) двух систем с однонаправленным взаимодействием может быть рассмотрен как стандартная задача управления с эталонной моделью, если интерпретировать ведущую систему как генератор "эталонного", или "программного", движения (сигнала). Общая задача управления синхронизацией двух или нескольких взаимосвязанных подсистем более сложна [63, 64]. Подход к управлению синхронизацией на основе понятия пассивности нелинейных систем предложен в работе [142] и развит в работах [153, 176, 182]. Общее определение синхронизации, охватывающее задачи как управляемой синхронизации, так и самосинхронизации, представлено в [128].

Общей особенностью задач управления возбуждением и синхронизацией колебаний является то, что желаемое поведение однозначно не фиксировано, а его характеристики задаются лишь частично. Например, в задаче возбуждения колебаний могут быть заданы требования лишь на амплитуду колебаний, а частота и форма могут меняться в определенных границах. В задачах синхронизации часто основным требованием является совпадение или согласованность колебаний всех подсистем, а характеристики движения каждой подсистемы могут варьироваться в широких пределах.

Удобным математическим выражением цели управления в подобных задачах является задание значений одного или нескольких числовых показателей. В задаче возбуждения колебаний в качестве такого показателя может выступать, напри-

мер, энергия системы. Формальным выражением синхронного движения двух подсистем с векторами состояния  $x_1 \in R^n$  и  $x_2 \in R^n$  может быть полное или частичное совпадение векторов состояния, например, равенство

$$x_1 = x_2. \quad (13.1)$$

Равенство (13.1) выделяет в объединенном пространстве состояний взаимодействующих подсистем некоторое подпространство (диагональ). Таким образом, можно сделать вывод, что в задачах управления колебаниями целевыми множествами являются не точки и не одномерные кривые, а многообразия более высокой размерности.

Другой особенностью является дополнительное требование малости управляющего воздействия. Действительно, если допустить значительные управляющие силы, превышающие по величине внешние силы, действующие на объект управления, обратные связи могут кардинально изменить динамику системы: колебательный характер процессов исчезнет.

Задачи стабилизации многообразий, так называемые *задачи частичной стабилизации*, систематически изучались во многих работах, (см., напр., монографии [86, 28], обзор [29]). Однако большинство предложенных алгоритмов стабилизации основано на преобразовании исходной задачи к аналогичной вспомогательной задаче для некоторой линейной системы при помощи дополнительных обратных связей (*метод линеаризации обратной связью*, или *feedback linearization*). Такой подход, как правило, не позволяет получить алгоритмы, удовлетворяющие требованию малости управления. Другой подход, основанный на методе скоростного градиента и позволяющий учесть требование малости управления, был предложен в работах [6, 108, 142].

**5. Модификация аттракторов (преобразование хаотических колебаний в периодические и обратно).** До начала 90-х годов в работах по анализу и синтезу колебательных систем рассматривался исключительно случай периодических колебательных режимов. Всплеск интереса к этой тематике и лавинообразный рост числа публикаций вызвала работа Э.Отта, Ч.Гребоджи и Дж.Йорке [180], в которой ставилась задача управления хаотическими колебаниями и

предлагался подход к ее решению, основанный на линеаризации отображения Пуанкаре.

Понятие "детерминированный хаос" вошло в науку в 70-х годах, когда было обнаружено, что в нелинейных детерминированных системах даже невысокого порядка могут возникать нерегулярные колебания, напоминающие случайные. Такие системы были названы хаотическими, а их предельные множества (отличающиеся от предельных циклов) были названы странными аттракторами. В 70-х – 80-х годах было обнаружено, что хаотическое поведение присуще большому числу природных и технических систем. Были развиты новые методы аналитического и численного исследования хаотических систем, основанные на таких понятиях, как отображения Пуанкаре (точечные отображения), показатели Ляпунова, фрактальные размерности [137, 68, 65].

Управление хаотическими колебаниями также потребовало новых подходов. Авторы [180] и их последователи выявили новый класс целей управления, вообще не предполагающий задания количественных характеристик желаемого движения. Вместо этого задается желаемый качественный тип предельного множества (аттрактора). Например, требуется преобразовать хаотические, нерегулярные колебания в периодические или квазипериодические. С другой стороны, накладывается уже упоминавшееся дополнительное требование малости управления. Развитие методов решения подобных задач стимулировалось новыми применениями в лазерных и химических технологиях, в технике телекоммуникаций, в биологии и медицине.

Приведем примеры [135, 153].

Исследования показали, что работоспособность лазера, перешедшего в хаотический (*многомодовый*) режим можно восстановить введением слабой обратной связи по оптическому каналу. В результате можно повысить мощность излучения при сохранении его когерентности. Напротив, в химической технологии свойство хаотичности процесса перемешивания в реакторе является полезным, так как способствует ускорению реакции и повышению качества продукта. Следовательно, разумной целью управления является в этом случае повышение степени хаотичности.

Наконец, в медицине для лечения некоторых видов сердеч-

ной аритмии было предложено использовать электростимуляторы с обратной связью, изменяющие степень нерегулярности сердечного ритма [131, 154].

Перейдем к изложению некоторых новых подходов к решению задач управления нелинейными колебаниями.

## 13.2. Управление энергией колебаний

### 13.2.1. Управление энергией консервативных систем. Частичная стабилизация

Рассмотрим уравнения объекта управления в *гамильтоновой* форме

$$\dot{\mathbf{p}} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + B u, \quad \dot{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T, \quad (13.2)$$

где  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$  – обобщенные координаты и импульсы;  $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  – функция Гамильтона (полная энергия системы);  $u = u(t) \in \mathcal{R}^m$  – вход (вектор обобщенных сил),  $B$  –  $m \times n$ -матрица,  $m \leq n$ . В качестве цели управления принимаем достижение данной энергетической поверхности, являющейся инвариантным множеством свободной системы [6]:

$$S = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_*\}. \quad (13.3)$$

Точнее формулируем цель управления в виде

$$H((\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))) \rightarrow H_* \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (13.4)$$

Применим к управлению объектом (13.2) метод скоростного градиента (см. [106, 103], Приложение А.). Заметим, что (13.4) соответствует (А.3) (с. 407), если ввести  $x \triangleq \text{col}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  и целевую функцию

$$Q(x) \triangleq \frac{1}{2} (H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - H_*)^2. \quad (13.5)$$

Для построения алгоритма скоростного градиента вычислим  $\dot{Q}$  – производную (13.5) в силу (13.2). С учетом консервативности получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}(x) &= (H - H_*) \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \left( - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}^T + B u \right) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}^T \right) = \\ &= (H - H_*) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} B u. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Конечные формы (см. Приложение А. (А.16)) алгоритма имеют вид [6]

$$u = -\gamma(H - H_*)B^T \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{p}}, \quad (13.7)$$

$$u = -\gamma \text{sign} \left( (H - H_*)B^T \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad (13.8)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления.

Как отмечено в [6], изложенный подход применим и в случае более сложных требований к желаемому поведению системы. Например, для систем с несколькими степенями свободы, составленных из нескольких подсистем, можно рекомендовать выбирать целевую функцию в виде

$$Q(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i Q_i(x_i), \quad (13.9)$$

где  $\alpha_i \geq 0$  – весовые коэффициенты, а функции  $Q_i(x)$  могут быть заданы в виде (А.10), или в других формах.

Условия достижения целей (13.4), (13.9) были впервые получены в [109, 145, 147, 158] и подробно рассмотрены в [64]. Например, достижение цели (А.10) гарантируется, если область фазового пространства между начальным уровнем энергии  $H_0 = H(\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0))$  и желаемым уровнем энергии  $H_*$  не содержит положений равновесия системы. Важно, что цель будет достигаться при любом значении коэффициента  $\gamma$  и, в частности, при сколь угодно малом  $\gamma > 0$ . Отсюда следует, что предложенные алгоритмы (13.7), (13.8) обеспечивают достижение цели при сколь угодно малом уровне управляющего воздействия.<sup>1</sup>

Наиболее общие из полученных результатов соответствуют заданию  $Q(x)$  в виде  $Q(x) = \|y(x)\|^2$ , где  $y(x)$  – набор инвариантов (первых интегралов) свободной системы, которая уже не обязательно должна иметь гамильтонову форму.

В рассмотренных выше задачах управления колебательными системами предельные множества траекторий систем нетривиальны, т.е. непусты и отличны от точки. Создание устойчивого колебательного режима отвечает созданию притягивающего множества — аттрактора системы. Такие

---

<sup>1</sup> Разумеется, чем меньше  $\gamma$ , тем больше время переходного процесса, но это не отражается на принципиальной достижимости цели.

задачи относятся к классу задач *частичной стабилизации*, в которых целевое множество может быть, вообще говоря, произвольным. Выход за рамки представлений о "хорошей" системе как об устойчивой системе характерен для теории управления на рубеже столетий. Ниже будут рассмотрены задачи управления хаотическими системами, также относящиеся к классу задач частичной стабилизации. Подробнее о частичной устойчивости и частичной стабилизации см. в [64].

**Пример. Управление колебаниями маятника.** Следуя [6], рассмотрим уравнение простейшего нелинейного осциллятора: физического управляемого маятника <sup>2</sup>

$$J\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u, \quad (13.10)$$

где  $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали ( $\varphi = 0$ ) в нижнем положении,  $u$  – управляющий крутящий момент,  $J, m, l$  – момент инерции относительно оси вращения, масса и расстояние между осью вращения и центром тяжести маятника (соответственно),  $g$  – ускорение свободного падения. Энергия маятника записывается в виде

$$H = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (13.11)$$

Рассмотрим задачу раскачки маятника до амплитуды, соответствующей энергии  $H_*$ , т.е. поставим цель (13.4). Достижение цели может соответствовать как возбуждению, так и подавлению колебаний маятника, в зависимости от величины начальной энергии  $H_0$ . Достижение цели (13.4) для  $H_* = 0$  означает стабилизацию маятника в нижнем положении, т.е. полное подавление колебаний, в то время как для  $H_* > 2mgl$  это соответствует непрерывному вращению.

СГ-алгоритмы в данном случае принимают простой вид (13.7), (13.8)

$$\dot{u} = -\gamma(H - H_*)\dot{\varphi}, \quad (13.12)$$

$$u = -\gamma \text{sign}((H - H_*)\dot{\varphi}). \quad (13.13)$$

Из результатов [64] следует, что если начальный энергетический слой между уровнями  $H_0$  и  $H_*$  не содержит равновесий, то уровень  $H_*$  будет достигаться при всех начальных

---

<sup>2</sup> Данная задача рассматривалась ранее в качестве примера применения метода Ляпунова, см. с. 281, уравнения (11.36)–(11.38).

условиях, а если начальный слой содержит только неустойчивые равновесия  $(\pi(2k + 1, 0))$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , то цель (13.4) будет достигаться при почти всех начальных условиях.

### 13.2.2. Возбуждение колебаний нелинейного осциллятора: авторезонанс

Рассмотрим несколько более общий пример: управляемый нелинейный осциллятор с одной степенью свободы, описываемый уравнением

$$\ddot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = u, \quad (13.14)$$

где  $\varphi = \varphi(t)$  – скалярная фазовая координата,  $u = u(t)$  – скалярное управляющее воздействие,  $\Pi(\varphi) \geq 0$  – потенциал. Состоянием системы (13.14) является пара  $x = \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ . Важным свойством системы является ее консервативность: все траектории свободной (неуправляемой) системы лежат на “энергетических поверхностях” – линиях постоянного уровня энергии  $\{(\varphi, \dot{\varphi}) : H(\varphi, \dot{\varphi}) = H_*\}$ , где  $H(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \Pi(\varphi)$  – полная энергия системы. Меняя значение  $H_*$ , можно получать траектории с качественно различными свойствами: устойчивые и неустойчивые равновесия, гомоклинические и гетероклинические орбиты, неограниченные траектории (см., напр., [12] для случая маятника – потенциала вида  $\Pi(\varphi) = \omega_0^2(1 - \cos \varphi)$ ). Поставим вопрос: насколько можно изменить траекторию системы (13.14) при помощи сколь угодно малого управляющего воздействия?

Ответ хорошо известен для случая квадратичного потенциала:

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi^2,$$

т.е. для гармонического осциллятора, описываемого линейным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = u. \quad (13.15)$$

В этом случае гармоническое внешнее воздействие

$$u(t) = \gamma \sin \omega t \quad (13.16)$$

при  $\omega = \omega_0$  и сколь угодно малой амплитуде  $\gamma$  позволяет наблюдать явление резонанса: наличие неограниченных решений, например вида

$$\varphi(t) = -\frac{\gamma t}{2\omega_0} \cos \omega t.$$

Динамика нелинейных систем более сложна. Даже для простого маятника вынужденные колебания могут иметь сложный, нерегулярный характер. Известны работы, устанавливающие условия резонанса, например в смысле неограниченного роста нормы решений при приближении частоты воздействия к некоторому бифуркационному значению [50, 129]. Однако существующие результаты относятся к задачам с периодическими решениями и не охватывают случай хаотических движений.

Сложность создания и исследования резонансных режимов в нелинейных системах объясняется тем, что частота колебаний в них существенно зависит от амплитуды. Возникает естественная мысль: не легче ли создать колебания в нелинейной системе, если варьировать частоту внешнего воздействия в зависимости от амплитуды колебаний? Это означает, что  $u(t)$  должно зависеть от  $\varphi(t)$ , т.е. не что иное как формирование воздействия в виде обратной связи.

Задача синтеза обратной связи, обеспечивающей достижение заданного уровня энергии, была решена выше (см. также [64, 108, 142, 145, 158] методом скоростного градиента. Для осциллятора (13.14) типовые (“линейный” и “релейный”) законы обратной связи, предложенные в [108, 142, 145], имеют вид (13.12), (13.13), т.е. такой же, как и для простого маятника.

Пусть теперь в системе (13.14) имеются потери (диссипация) типа вязкого трения, т.е. вместо (13.14) рассматривается уравнение

$$\ddot{\varphi} + \varrho \dot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = u, \quad (13.17)$$

где  $\varrho > 0$  – коэффициент диссипации. Для линейных систем вида (13.17) (при  $\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi^2$ ) резонансом принято называть режим наибольшей амплитуды колебаний, который наступает при воздействии (13.16) с частотой  $\omega^2 = \omega_0^2 - \varrho^2/4$ . При этом для малых  $\varrho > 0$  колебания в системе (13.16), (13.17) имеют амплитуду

$$\bar{A} = \frac{\gamma}{\varrho\omega_0}(1 + O(\varrho^2))$$

и среднюю энергию за период

$$\bar{H} = \left\langle \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\varphi^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\varrho} \right)^2 [1 + O(\varrho^2)]. \quad (13.18)$$

Колебания нелинейного осциллятора (13.17) при воздействии (13.12) или (13.13), также могут достичь больших значений амплитуды. В [64, 109] показано, что в системе (13.13), (13.17) достигается значение энергии не меньше, чем

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\varrho} \right)^2, \quad (13.19)$$

если параметры закона (13.13) выбраны так, что  $H_* \geq \bar{H}$ . Поскольку (13.19) при малых  $\varrho$  приближается к (13.18), можно сказать, что обратная связь (13.12) или (13.13) создает в нелинейной системе (13.17) резонансный режим, энергия которого (в частном случае гармонического осциллятора) не меньше, чем энергия колебаний при возбуждении гармоникой с резонансной частотой. Это явление может иметь разнообразное применение.

Надо сказать, что понимание явления резонанса в физике осталось практически неизменным со времен Галилея, который впервые подробно описал его в 1638 г. В подавляющем большинстве работ рассматривается гармоническое (в крайнем случае – периодическое) входное воздействие. В книге [11] было введено понятие *авторезонанса* как ”резонанса под действием силы, порождаемой движением самой системы”, то есть указывалось на возможность воздействий в виде обратной связи. Однако возбуждение продолжали рассматривать как периодическое, допуская лишь возможность медленного (по сравнению с основным тоном колебаний) изменения частоты [35]. Воздействия же вида (13.12), (13.13) могут менять свой характер в темпе процесса, что позволяет существенно уменьшить требуемую мощность управления.

Уместно пойти дальше и поставить задачу: до какой энергии можно раскачать осциллятор (13.17) при помощи обратной связи? Оценка достижимой энергии, как показывает соотношение (13.19), пропорциональна квадрату отношения допустимой амплитуды управления к величине демпфирования. Это верно и для более общих нелинейных систем [64].

Очевидно, величина достижимой энергии характеризует степень возбудимости колебаний в системе. Поэтому можно ввести *характеристику возбудимости* как

$$E(\gamma) \triangleq \frac{\sqrt{\bar{H}(\gamma)}}{\gamma}, \quad (13.20)$$

где  $\bar{H}(\gamma)$  – достижимый уровень энергии при управлении, не превышающем  $\gamma$  по модулю. Для линейных систем  $E(\gamma) = \text{const}$ . Для нелинейных систем  $E(\gamma) \neq \text{const}$  и возбудимость может быть измерена экспериментально, как и обычная частотная характеристика линейной системы (рис. 13.1).

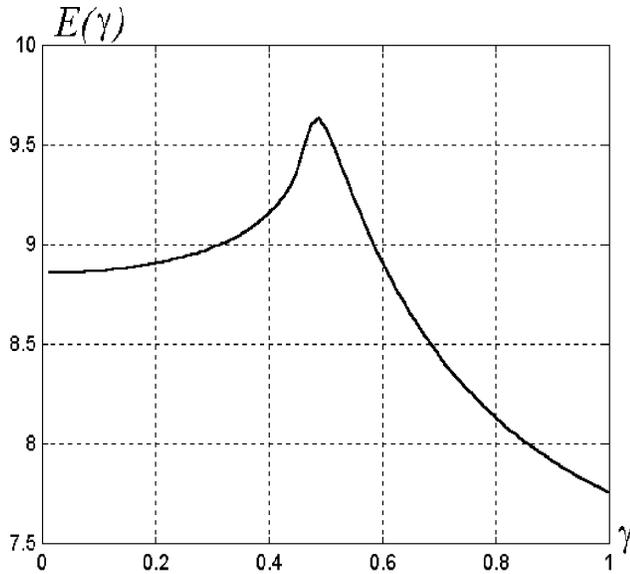


Рис. 13.1. Характеристика возбудимости маятника (13.17) при  $\rho = 0.1$ ,  $\omega_0^2 = 10$ .

В отличие от измерения частотной характеристики, когда на вход системы подается гармоническое воздействие (13.16) с постоянной амплитудой и меняющейся частотой, при измерении характеристики возбудимости меняется амплитуда (уровень) входного сигнала, а сам сигнал задается в виде обратной связи. Точному расчету величины  $E(\gamma)$  препятствует необходимость решения сложной задачи оптимального синтеза. Однако нижнюю оценку этой величины можно получить, подавая входной сигнал (13.8) (в частном случае (13.8) ) скоростно-градиентного типа, являющийся локально-оптимальным. Можно показать, что при малых  $\gamma$  подача входного сигнала (13.8) дает приближенное значение для  $E(\gamma)$  с точностью порядка  $\gamma$ .

Знание характеристики возбудимости нелинейной системы позволяет судить о ее близости к границе устойчивости и об ее стабилизирующих свойствах. В частности, характеристика возбудимости занимает место амплитудно-фазовой характеристики в критериях абсолютной устойчивости для нелинейной номинальной системы [146].

### 13.3. Понятие о хаотических системах

#### 13.3.1. Развитие понятия колебания

Понятие *хаоса* (точнее, *детерминированного хаоса*) является сравнительно новым в теории систем – оно появилось в 70-х годах нашего века. Хаотические системы [61, 65, 68, 85] представляют новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам от других моделей (стохастических, нечетких и т.п.). Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняются, "плавают" как частота, так и амплитуда.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в., основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались линейные дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty \quad (13.21)$$

Решениями (13.21) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t \quad (13.22)$$

с круговой частотой  $\omega$  и периодом  $T = 2\pi/\omega$ , амплитуда которых  $A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2}$  зависит от начальных условий:

$A_1 = y(0)$ ,  $A_0 = \dot{y}(0)/\omega$ . Очевидно, решение (13.22) непрерывно зависит от начальных условий, т.е. малое изменение величин

$y(0), \dot{y}(0)$  приводит к малому изменению решения  $y(t)$  на всей временной полуоси  $0 \leq t < \infty$ . Частотный спектр функции (13.22) дискретен и состоит из одной точки  $\omega/2\pi$

Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида (13.21) с различными частотами колебаний  $\omega_1, \dots, \omega_r$ . При этом, если частоты  $\omega_1, \dots, \omega_r$  соизмеримы (являются целыми кратными некоторой частоты  $\omega_0$ ), то колебания будут периодическими с периодом  $2\pi/\omega_0$ . Если же частоты  $\omega_i$  несоизмеримы, то такие колебания не являются периодическими, они называются *квазипериодическими*. В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством.

Заметим, что "на глаз" различить периодические и квазипериодические колебания может быть затруднительно, поскольку реальные измерения (в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью и отличить рациональное отношение частот от иррационального практически невозможно.

На рубеже XIX-XX в. выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Основы соответствующего математического аппарата – теории нелинейных колебаний – были заложены в работах А.Пуанкаре, Б.Ван дер Поля, А.А.Андропова, Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова, [11, 18, 33, 52, 55]. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого предельного цикла – периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (по крайней мере – траектории с близкими начальными условиями). К числу классических примеров нелинейных дифференциальных моделей, обладающих предельным циклом, относятся *уравнение Ван дер Поля*

$$\ddot{y} + \epsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (13.23)$$

где  $\epsilon > 0$ ; *уравнение Дуффинга*

$$\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0y^3 = 0, \quad (13.24)$$

где  $p > 0, q > 0, q_0 > 0$ ; система с релейным элементом

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{sign}(y) = 0. \quad (13.25)$$

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например *релаксационные* (близкие к прямоугольным) колебания, учитывать изменение формы колебания в зависимости от начальных условий (системы с несколькими предельными циклами) и так далее. Теоремы о разложении периодической функции в ряд Фурье показывают, что спектр предельного цикла состоит из счетного набора частот, кратных некоторой основной частоте.

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Это убеждение поддерживалось и математическими результатами: например, известная теорема Пуанкаре–Бендиксона (см. [11, 18, 33, 55, 94], п. 11.2.3. с. 246) утверждает, что единственно возможные виды ограниченных установившихся движений в непрерывных системах второго порядка – это либо состояние равновесия, либо предельный цикл.

Однако в середине XX в. сами математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы Е. Лоренца [175], опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье–Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью 3-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2. \end{cases} \quad (13.26)$$

Решения системы (13.26) при некоторых значениях параметров (например, при  $\sigma = 10$ ,  $r = 97$ ,  $b = 8/3$ ) выглядят как нерегулярные колебания. Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут приближаться к предельному множеству (*аттрактору*), имеющему весьма причудливое строение (рис. 11.9 на с. 268). Внимание к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса [187], которые называли такие аттракторы "*странными*", а также работы Т.Ли и Дж. Йорке [169], которые ввели термин "*хаос*" для обозначения подобных нерегулярных

явлений в детерминированных системах. Серьезные исследования хаотических явлений были выполнены также в 60-70-х годах в научных школах Москвы (А.Н. Колмогоров, Я.Г. Синай, В.И. Арнольд и их ученики), Нижнего Новгорода (Ю.И. Неймарк, Л.П. Шильников и их ученики). В дальнейшем хаотическое поведение было обнаружено в огромном количестве систем в механике, лазерной физике и радиофизике, химии, биологии и медицине, в электронных цепях и т.д.[61, 70, 65, 85, 99, 133, 135, 159, 183]. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем, показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным. Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах.

Следует отметить, что "на глаз" отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем периодический процесс от квазипериодического.

### 13.3.2. Определение хаотической системы

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \quad (13.27)$$

где  $x = x(t) \in R^n$  – вектор состояния системы,  $0 \leq t < \infty$ .

**Определение 1.** Замкнутое множество  $\Omega \subset R^n$  называется *аттрактором* системы (13.27), если:

а) существует открытое множество  $\Omega_0 \supset \Omega$  такое, что все траектории  $x(t)$  системы (13.32), начинающиеся в  $\Omega_0$ , определены при всех  $t \geq 0$  и стремятся к  $\Omega$  при  $t \rightarrow \infty$  (т.е.  $\text{dist}(x(t), \Omega) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , если  $x(0) \in \Omega_0$ , где  $\text{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $\Omega$ );

б) никакое собственное подмножество  $\Omega$  этим свойством не обладает.  $\square$

**Определение 2.** Аттрактор называется *странным*, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.  $\square$

**Определение 3.** Система называется *хаотической*, если у нее существует хотя бы один странный аттрактор.  $\square$

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.28)$$

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое "сверхчувствительностью", или "чувствительной зависимостью", от начальных условий: любые две сколь угодно близких траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Имеются и другие определения странных аттракторов и хаоса. Например, часто в определение странного аттрактора включают дополнительные требования: существование траекторий (или семейства периодических траекторий), всюду плотных в  $\Omega$ , топологическую транзитивность и так далее, подчеркивающие наличие свойства "перемешивания" траекторий. Недавние результаты Г.А.Леонова [55], т.2, показывают, что во многих случаях вместо отсутствия устойчивости по Ляпунову при определении странного аттрактора целесообразно требовать отсутствия так называемой *устойчивости по Жуковскому*, допускающей разную скорость течения времени на разных траекториях системы. Однако строго доказать хаотичность системы непросто, даже пользуясь простейшим определением. Для некоторых общепризнанно хаотических систем полное доказательство хаотичности до сих пор неизвестно, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик. Приведем несколько примеров хаотических систем.

**Пример 1. Система (цепь) Чуа.** В 1982 г. специалисты по электронным цепям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе

хаотические, колебания. Математическая модель цепи Чуа имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (13.29)$$

где  $x, y, z$  – безразмерные переменные, пропорциональные напряжениям на емкостях и току через индуктивность;  $f(x) = M_0x + 0,5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|)$ . При  $p = 9$ ,  $q = 14,286$ ,  $M_1 = -1/7$ ,  $M_0 = 2/7$  траектории системы (13.29) демонстрируют хаотическое поведение.

**Пример 2.** Разнообразные хаотические колебания можно генерировать, подавая гармонический сигнал на вход нелинейных осцилляторов, например, заменяя ноль в правых частях уравнений (13.23)–(13.26) синусоидальной функцией

$$z(t) = A \sin(\omega_0 t). \quad (13.30)$$

При некоторых значениях частоты и амплитуды возбуждения происходит ”размазывание” предельного цикла и колебания в нелинейной системе становятся хаотическими.

Для дискретного времени примеры хаотических систем существуют для любой размерности состояния системы, даже при  $n = 1$ .

**Пример 3.** Дискретная система с квадратичной правой частью

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k), \quad x_k \in R^1, \quad (13.31)$$

построенная с помощью так называемого *логистического отображения*  $F(x) = \lambda x(1 - x)$ , является хаотической [65, 68] при  $\lambda_0 < \lambda < 4$ , где  $\lambda_0 \approx 3,57$ . Ее аттрактором является отрезок  $[0, 1]$ .

**Пример 4.** Система

$$x_{k+1} = \{Mx_k\}, \quad (13.32)$$

где через  $\{A\}$  обозначается дробная часть вещественного числа  $A$ , является хаотической при любом  $M > 1$ . Система (13.32) часто используется для генерации псевдослучайных чисел – возможно, первого практического применения хаоса. Это применение основано на том, что при любом начальном условии  $x_0$ , несоизмеримом с  $M$ , доля точек последовательности (13.32), попавших в некоторый интервал, лежащий в от-

резке  $[0, 1]$  пропорциональна длине этого интервала [92]. Таким образом, если частоту попадания точек в интервал считать оценкой некоторой вероятности, то совокупность таких вероятностей будет задавать равномерное распределение на  $[0, 1]$ .

### 13.3.3. Критерии хаотичности

Обратимся теперь к критериям хаотичности.

Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т.е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно, основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым *старшим показателем Ляпунова*.

Показатели Ляпунова определяются для заданной "опорной" траектории  $\bar{x}(t)$  системы (13.27) с начальным условием  $\bar{x}(0) = x_0$ . Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи  $\bar{x}(t)$ )

$$\frac{d}{dt}\delta x = W(t)\delta x, \quad (13.33)$$

где  $\delta x = x - \bar{x}(t)$ ,  $W(t) = \frac{\partial F(x(t))}{\partial x}$  – матрица Якоби системы (13.27) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения  $\bar{x}(t)$ . Предполагается, что частные производные от  $F(x)$  существуют, т.е. правые части (13.27) – гладкие функции. Задав начальное отклонение  $z = \delta x(0)$ , можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \quad (13.34)$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (13.33) в направлении  $z$  и называемую *характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении  $z$*  [34, 65, 68].

Еще А.М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (13.34) существует, конечен для любого  $z \in R^n$  и не зависит от начального выбора точки  $x_0$  на траектории  $x(t)$ . Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания:  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$  и существует базис  $z_i \in R^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для которого  $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Наиболее важен старший ляпуновский показатель  $\alpha_1$ . Если  $\alpha_1 > 0$  вдоль ограниченного решения  $\bar{x}(t)$ , плотного в аттракторе  $\Omega$ , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина  $\alpha_1$  характеризует степень неустойчивости, другими словами, – степень экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей  $\dot{x} = Ax$  и нулевого опорного решения  $\bar{x}(t) = 0$ , очевидно,  $\alpha_1 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ , т.е.  $|\alpha_1|$  совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Старший показатель  $\alpha_1$  может быть приближенно вычислен и без построения фундаментальных решений уравнений в вариациях

$$\alpha_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{\|x(t) - \bar{x}(t)\|}{\epsilon}, \quad (13.35)$$

где  $x(t)$  – решение (13.27) с начальным условием  $x(0)$ ,  $\|x(0) - \bar{x}(0)\| = \epsilon$ , причем  $t$  – достаточно велико, а  $\epsilon > 0$  достаточно мало. Для повышения точности расчета можно вычислять среднее правых частей (13.35) при разных начальных условиях  $x_0$ , взятых на траектории  $\bar{x}(t)$ . Тогда  $t$  необязательно брать очень большим [68].

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория  $\bar{x}(t)$  аппроксимируется через время  $T$  другой траекторией с погрешностью  $\Delta$ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\epsilon}, \quad (13.36)$$

где  $\epsilon$  – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем, в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения даже при сколь угодно малом горизонте (времени прогноза).

Другой важной характеристикой хаотической системы является *фрактальная размерность* аттрактора, характеризующая его "густоту", или "пористость". Для ее подсчета аттрактор  $\Omega$  покрывается кубиками размера  $\epsilon$ . Пусть  $N(\epsilon)$  – количество кубиков в покрытии. Вычислим величину

$$\mu(\Omega, d) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \epsilon^d. \quad (13.37)$$

(Если предел не существует, то в (13.37) берется нижний предел – наименьший из частных пределов по подпоследовательностям). Можно показать, что существует число  $d_f > 0$  такое, что  $\mu(\Omega, d) = +\infty$  при  $d < d_f$ ,  $\mu(\Omega, d) = 0$  при  $d > d_f$ . Это число называется *фрактальной размерностью* или *емкостью* множества  $\Omega$ . Из определения следует  $N(\epsilon)\epsilon^{-d_f}$ , откуда ясно, что емкость можно определить из соотношения

$$d_f = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (13.38)$$

Можно показать, что если множество  $\Omega$  есть точка, гладкая кривая или двумерная поверхность, то  $d_f$  будет равна 0, 1 или 2, соответственно. Однако есть множества, у которых  $d_f$  – дробная величина. Такие множества были названы Б. Мандельбротом *фрактальными*, или *фракталами*. Примерами фракталов являются странные аттракторы: для системы Лоренца  $d_f \approx 2,07$ , а для цепи Чуа  $d_f \approx 2,81$ . Известны математические результаты, утверждающие, что множество с фрактальной размерностью  $d_f$ , может быть размещено без самопересечений в евклидовом пространстве, имеющем размерность не выше, чем  $2d_f + 1$ . Если же разрешить самопересечения, то размерность объемлющего пространства может быть снижена до  $d_f + 1$ . Эти результаты важны при построении модели системы по экспериментальным данным; они означают, что поведение траекторий на аттракторе, имеющем фрактальную размерность  $d_f$  может быть описано моделью в пространстве состояний с размерностью, не превышающей  $2d_f + 1$ . Более подробно о различных видах фрактальной размерности и о способах ее вычисления можно прочесть в [65, 68].

#### 13.3.4. Применения хаотических моделей

Остановимся на областях применения хаотических моделей.

Из предыдущего ясно, что хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом такая величина, как частота колебания, становится "нечеткой" и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: *старший ляпуновский показатель* (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траекторий и, следовательно, время прогнозируемости процесса; фрактальная размерность, характеризующая "пористость" клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

**1. Описание нерегулярного поведения реальных систем.** На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов, проявляющих при некоторых условиях хаотическое поведение. Приведем несколько примеров [61, 65, 68, 85]:

- газовые или полупроводниковые лазеры в так называемых многомодовых режимах ;
  - механические системы, состоящие из нескольких связанных осцилляторов (например, маятников), а также системы с ударами и люфтами;
  - электронные схемы с активными элементами, например полупроводниковыми приборами с отрицательным дифференциальным сопротивлением (такими, как туннельные диоды, диоды Ганна и т.п.);
  - химические и физико-химические реакции с нелинейной кинетикой (например, так называемая реакция Белоусова–Жаботинского
  - временные ряды в экономике и финансах (например, бизнес-циклы, цены на акции, обменные курсы валют [133]).
- Заметим, что в экономических и финансовых приложениях

хаотические модели в последние годы потеснили традиционные для этих областей стохастические модели.

**2. Генерация нерегулярных сигналов.** Во многих технических системах возникает необходимость использования псевдослучайных чисел и сигналов [92]. В качестве генераторов псевдослучайных чисел можно использовать хаотические системы.

Простейший подход к построению хаотических генераторов состоит в том, что берется динамическая система, описываемая одной из типовых хаотических моделей, и по внешнему виду траекторий выбирается та, в которой качественный характер колебаний наиболее близок к желаемому. После этого путем подбора параметров моделей устанавливаются желаемые качественные характеристики колебаний (амплитуда, спектр и т.д.). Использование характеристик хаотической динамики (показателей Ляпунова, фрактальных размерностей и т.п.) позволяет задавать дополнительные свойства шумов и помех при их генерации. Заметим, что "на глаз" квазипериодические колебания с большим числом составляющих гармоник и хаотические колебания бывает трудно различить. В то же время, как и при моделировании нерегулярных процессов, малая размерность и малое число параметров хаотических моделей дают им дополнительные преимущества перед линейными моделями с большим числом гармоник.

**3. Синхронизация нерегулярных колебаний и управление ими.** Двойственность природы хаотических систем (детерминированные системы с хаотическим поведением) приводит к новым неожиданным их применениям. Например, показано [156, 159, 181], что две хаотические системы можно заставить колебаться синхронно (в одной фазе), если подавать на одну или на обе системы сигнал обратной связи по ошибке рассогласования. Использование этого эффекта в технике связи позволяет применять хаотический несущий сигнал вместо периодического, что в свою очередь дает возможность повысить надежность и скрытность процесса передачи сообщений. Подробнее задача управляемой синхронизации рассмотрена в следующем параграфе, (см. также [135, 153]).

Отметим, что синхронизация – это лишь один (хотя и весьма важный) класс задач управления хаотическими колебани-

ями. Представляют также интерес задачи, где целью управления является достижение заданного значения какой-либо характеристики процесса: энергии, энтропии, фрактальной размерности и т.д. В других задачах целью является изменение характера колебаний (модификация аттракторов, см. 13.1.). Например, хаос может быть нежелательным и систему требуется стабилизировать вблизи равновесия или вблизи периодической орбиты (в биологии это задачи стабилизации биоритмов [61], в экономике – повышение прогнозируемости бизнес-циклов [133]). Иногда, наоборот, хаос может оказаться полезным (например, хаотическое перемешивание ускоряет ход химической реакции и повышает качество ее продуктов). В таких случаях цель управления состоит в создании хаотических колебаний с заданными свойствами.

Еще раз подчеркнем характерную особенность задач управления колебательными, в том числе хаотическими, процессами. Она состоит в том, что за время процесса управления в системе может происходить большое число колебаний и, значит, энергию управления за один период (т.е. среднюю мощность управляющего сигнала) следует считать достаточно малой. Интересно, в частности, выделить задачи, решаемые с помощью управления сколь угодно малой мощности (см. п. 13.2, а также п. 13.4). С другой стороны, хаотичность системы означает сильную чувствительность ее к изменению начальных условий и внешних воздействий. Это способствует снижению требуемой мощности управления, но затрудняет обеспечение устойчивости замкнутой системы.

#### **13.4. Адаптивное управление хаотическими системами на основе линеаризации отображения Пуанкаре и метода целевых неравенств**

##### *13.4.1. Постановка задачи и метод решения*

Идея использования отображения Пуанкаре (точечного отображения) для управления хаотическими колебаниями была предложена Оттом, Гребоджи и Йорке [180] и явилась основой значительного количества публикаций. Однако, ряд задач остались нерешенными, в частности, не были рассмотрены задачи адаптивного управления по выходу. Ниже изложено решение этой задачи, основанное на использовании ме-

тогда рекуррентных целевых неравенств [103], предложенного В.А. Якубовичем в 1966 г. (см. Приложение В).

Рассмотрим нелинейную управляемую систему, описанную моделью состояния

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u), \quad y = h(x), \quad (13.39)$$

где  $x = x(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u = u(t)$  – скалярный вход (управляющее воздействие);  $y = y(t)$  – скалярная выходная переменная, доступная измерению. Задача состоит в определении закона управления (алгоритма управления)  $u(t) = U\{y(\tau), u(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$  в виде  $u(t) \in U$ , где  $U$  – выпуклое множество допустимых значений управления, например  $U = [-\bar{u}, \bar{u}]$  при  $\bar{u} > 0$ . Требуется обеспечить достижение следующей цели управления

$$|y(t) - y_*(t)| < \Delta, \quad (13.40)$$

где  $y_*(t) = h(x_*(t))$  – желаемая выходная функция, соответствующая желаемой периодической или рекуррентной траектории (орбите)  $x_*(t)$  системы (13.39) для  $u(t) \equiv u_*$ . Напомним, что траектория  $x(t)$  называется *рекуррентной*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  она возвращается в  $\varepsilon$ -окрестность своей произвольной точки не позже, чем через некоторое ограниченное время  $T_\varepsilon$ . (Свойство рекуррентности было введено Дж. Биркгофом в 1927 г., [45].

Трудность поставленной задачи вызвана ее существенной нелинейностью. Более того, во многих приложениях некоторые из параметров системы (13.39) неизвестны, т.е. желаемая орбита  $x_*(t)$  и "идеальное" управление  $u_*$  также неизвестны. Наконец, иногда значения  $y_*(t)$  определены и  $y(t)$  доступно измерению только в некоторые моменты  $t_k, k=1, 2, \dots$

Для решения задачи мы формулируем ее дискретизованный вариант. Положим, что в пространстве состояний системы задана гиперповерхность  $S_u$ , которая зависит от значения управления, как от параметра, и пересекает данную опорную траекторию  $\bar{x}(t)$  трансверсально, т.е. не касаясь ее в точке  $\bar{x}_0 = \bar{x}(0)$  для всех  $u \in U$ .  $S_u$  трансверсально к  $x(t)$ . Можно показать, что в этом случае существует (меньшее) открытое множество  $\bar{S}_u \subset S_u$  такое, что каждая траектория (13.39), начинающаяся в точке  $x \in \bar{S}_u$  пересечется снова с поверхностью

$S_u$  в точке  $x'=P(x, u)$ . Отображение  $P : \bar{S}_u \times U \rightarrow S_u$  называется *управляемым отображением Пуанкаре*. Оно определяет новую дискретную систему управления:

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k), \quad y_k = h(x_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (13.41)$$

где  $u_k \in U$ ,  $x_k = x(t_k) \in S_{u_k}$ , по крайней мере для  $x_k$ , близких к  $\bar{x}$ . Траектория (13.41) совпадает с траекторией исходной системы (13.39) в моменты  $t_k$  пересечения  $x(t)$  с поверхностью  $S_{u_k}$ , если управляющее воздействие кусочно-постоянно между пересечениями:  $u(t) = u_k$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Пусть  $z \in \mathcal{R}^{n-1}$  – вектор координат в окрестности  $\bar{S}$  в точке  $\bar{x}_0$  в некотором координатном базисе  $z(x)$ . Без потери общности мы можем предположить, что  $z(\bar{x}_0)=0$ , и рассмотреть систему (13.41) в фазовом пространстве  $\mathcal{R}^{n-1}$ :

$$z_{k+1} = \tilde{P}(z_k, u_k), \quad y_k = \tilde{h}(z_k), \quad (13.42)$$

где  $\tilde{P}(0, 0)=0$ ,  $\tilde{h}(0)=0$ . Тогда дискретная система (13.42) может быть описана моделью вход–выход:

$$y_{k+1} + \dots + a_{n-2}y_{k-n+2} = b_0u_k + \dots + b_{n-2}u_{k-n+2} + \varphi_k \quad (13.43)$$

где  $a_i, b_i$  – коэффициенты передаточной функции линеаризованной системы (13.42) :

$$\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} = C(\lambda \mathbf{I} - A)^{-1}B, \quad C = \frac{\partial \tilde{h}(0)}{\partial z}, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i \lambda^i,$$

$A(\lambda) = \lambda^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \lambda^i$ , а возмущение  $\varphi_k$  удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_k| \leq L_\varphi (1 + \|A\|)^{2n} (\Delta_z^2 + \Delta_u^2) \quad (13.44)$$

Введем вектор настраиваемых параметров

$$\vartheta_k = b_{0k}^{-1} \text{col} \{1, \hat{a}_{0k}, \dots, \hat{a}_{n-2,k}, -\hat{b}_{1k}, \dots, -\hat{b}_{n-2,k}\} \in \mathcal{R}^{2n-2},$$

вектор наблюдаемых величин (*регрессор*)

$$\omega_k = \text{col} \{y_*, y_k, \dots, y_{k-n+2}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n+2}\} \in \mathcal{R}^{2n-2}$$

и выберем закон управления следующим образом

$$u_k = \begin{cases} \vartheta_k^T \omega_k & \text{if } |\vartheta_k^T \omega_k| \leq \bar{u} \\ u_{k-1} & \text{иначе} \end{cases} \quad (13.45)$$

Алгоритмы адаптации основаны на методе целевых неравенств и содержат зоны нечувствительности, которые парируют влияние как возмущения, так и ошибок измерения. Возмущение модели (13.43) становится существенным вне некоторой окрестности опорной траектории  $\bar{x}(t)$ . Поэтому, представляется оправданным введение инверсных, или внешних, зон нечувствительности (отключение адаптации для больших значений  $\|x_k - \bar{x}(t_k)\|$  или  $\|z_k - \bar{z}_k\|$ , превышающих некоторый порог), дополнительно к основной "целевой" зоне нечувствительности. В итоге алгоритм адаптации выглядит следующим образом [148]:

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1} &= \begin{cases} 1, & \text{если } |y_{k+1} - y_*| > \Delta_y \text{ и} \\ & |y_{k-i} - \bar{y}(t_{k-i})| < \bar{\Delta}, i = 0..N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\
\vartheta'_{k+1} &= \begin{cases} \vartheta_k - \gamma \text{sign}(b_0)(y_{k+1} - y_*)w_k/|w_k|^2, \\ & \text{если } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta_k & \text{иначе;} \end{cases} \\
u'_{k+1} &= \vartheta'_{k+1}{}^T w_{k+1} \\
\vartheta_{k+1} &= \begin{cases} \vartheta'_{k+1}, & \text{если } |u'_{k+1}| \leq \bar{u} \text{ и } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta'_{k+1} - (u'_{k+1} - \bar{u})/|w_k|^2, & \text{если } u'_{k+1} > \bar{u} \text{ и } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta'_{k+1} - (u'_{k+1} + \bar{u})/|w_k|^2, & \text{если } u'_{k+1} < -\bar{u} \text{ и } \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta_k, & \text{если } \mu_{k+1} = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{13.46}$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления адаптации,  $\bar{u}$  – максимальное абсолютное значение управления;  $\Delta_y$  – максимальная желаемая разница между  $y_k$  и  $y_*$ ;  $\bar{\Delta}$  связано с размером "трубки" в пространстве состояния около базовой траектории  $\bar{x}(t)$ , где определена модель вход-выход (13.43). Для формулировки условий работоспособности алгоритма вводится следующий вариант свойства наблюдаемости: дискретная нелинейная система (13.42) называется  $N$ -наблюдаемой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |y_{k+i}| < \delta, i = 0..N-1 \Rightarrow \|z_k\| < \varepsilon. \tag{13.47}$$

Результат о сходимости предложенного адаптивного регулятора содержится в следующем утверждении.

**Теорема [148].** Пусть  $F$  в (13.39) – дважды непрерывно дифференцируема,  $h$  – непрерывно дифференцируема. Предположим, что

- 1) опорная траектория  $\bar{x}(t)$  рекуррентна;
- 2) система (13.42)  $N$ -наблюдаема для некоторого  $N > 0$ ;
- 3) знак  $b_0$  в (13.43) известен;
- 4) параметры системы и цель удовлетворяют следующим ограничениям:

$$|b_0| - \sum_{i=1}^{n-2} |b_i| > 0, |y_*| < \bar{u} \left( |b_0| - \sum_{i=1}^{n-2} |b_i| \right). \quad (13.48)$$

Тогда существует  $\Delta_0 > 0$  такое, что для каждого  $\Delta_y < \Delta_0$  существуют  $\bar{\Delta} > \Delta_0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  такие, что цель (13.40) с  $\lambda y_*$  и  $\lambda \Delta_y$  для всех достаточно больших  $k > 0$  в системе (13.39), (13.45), (13.46) с ограничением  $|u_k| < \lambda \bar{u}$ .

Доказательство теоремы основано на использовании функции Ляпунова  $V(x) = \|\theta - \theta_*\|^2$ . Вышеуказанный алгоритм был успешно применен к задачам адаптивного управления моделью брюсселятора с внешним возбуждением, моделью Рёсслера и моделью Кукушкина–Осипова химической реакции с фазовым переходом [31, 149].

Ниже приводятся в качестве примеров результаты для брюсселятора и системы Рёсслера, следуя [31].

#### 13.4.2. Адаптивное управление моделью брюсселятора

Одной из наиболее популярных и подробно исследованных моделей химической кинетики является тримолекулярная модель, или брюсселятор. Эта модель была предложена А.Тьюрингом [192] в 1952г. и детально изучалась И. Пригожиным с коллегами [70]. Модель брюсселятора в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y \\ \dot{Y} = BX - X^2Y, \end{cases} \quad (13.49)$$

где  $X$  – концентрация исходного вещества;  $Y$  – концентрация продукта реакции;  $A, B$  – параметры (константы скорости реакции).

Рассматриваемая система имеет неподвижную точку при  $X = A$ ,  $Y = BA^{-1}$ , и для некоторых значений параметров  $A, B$  эта неподвижная точка неустойчива, а система (13.49) имеет устойчивый предельный цикл [70], подобный изображенному на рис. 13.2. Рассмотрим следующую задачу управления. Пусть в моменты времени  $t_k$  переменная  $Y(t)$  достигает своего

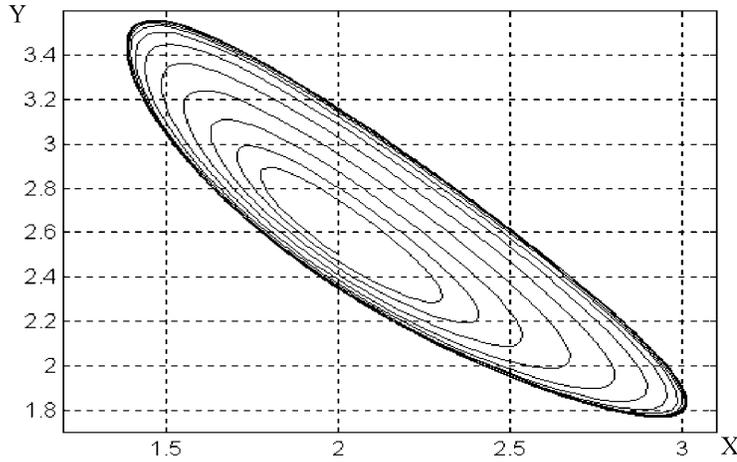


Рис. 13.2. Устойчивый предельный цикл брюсселятора.

$k$ -го локального максимума, соответствующее максимальное значение обозначим  $y_k = Y(t_k)$ . Пусть управляющее воздействие  $u(t)$  будет кусочно-постоянной функцией, изменяющей параметр  $A$  в моменты времени  $t_k$  с учетом измеренного значения  $y_k$ :  $A = A_0 + u(t)$ ,  $u(t) = u_k$  для  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Значения параметров системы  $A_0$  и  $B$  предполагаются неизвестными. Цель управления состоит в удержании значений локальных максимумов  $Y(t)$  на данном уровне  $y_*$  с помощью целенаправленного изменения  $u(t)$  в моменты времени  $t_k$ . Линеаризованная модель "вход-выход" (13.43) примет вид

$$y_{k+1} = ay_k + bu_k + \varphi_k, \quad (13.50)$$

где  $a$  и  $b$  – неизвестные коэффициенты,  $\varphi_k$  – ограниченная ошибка модели.

Адаптивный алгоритм управления включает в себя алгоритм управления основного контура

$$u_k = (y_* - \hat{a}_k y_k) \hat{b}_k^{-1}, \quad (13.51)$$

определяющий новое значение управляющего воздействия  $u_k$ , и алгоритм адаптации, основанный на результатах предыдущей главы и вычисляющий оценки  $\hat{a}_k, \hat{b}_k$  параметров модели

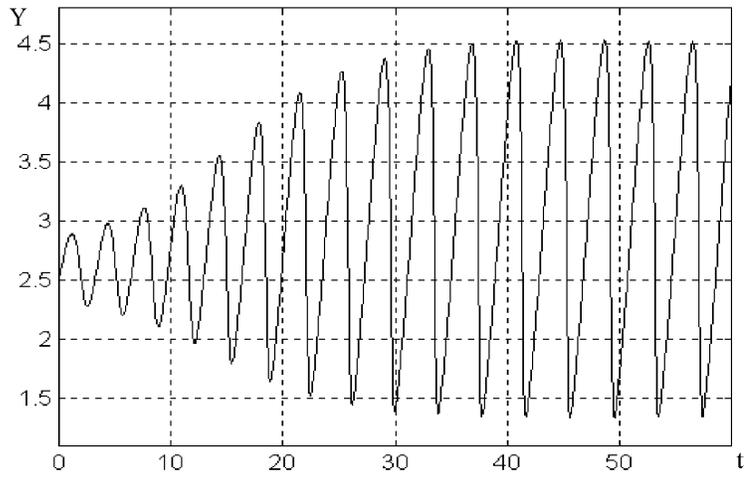


Рис. 13.3. График  $Y(t)$  для управляемого брусселятора.

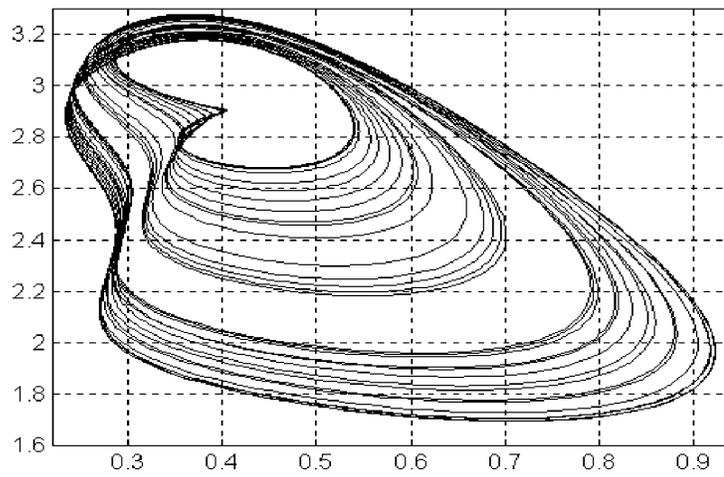


Рис. 13.4. Хаотический аттрактор возбужденного брусселятора.

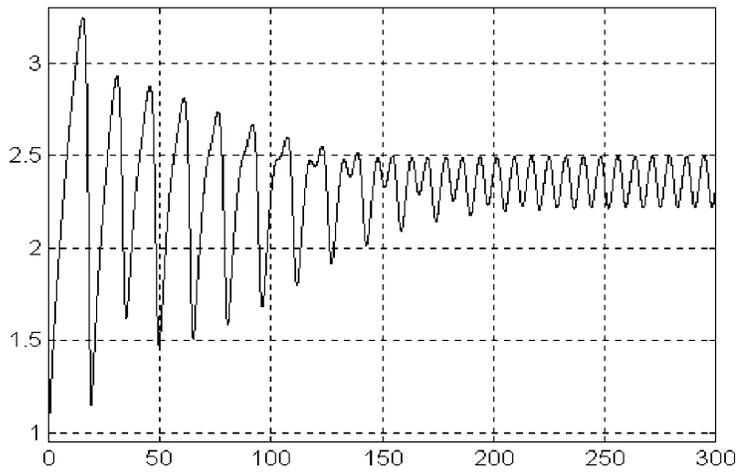


Рис. 13.5. График  $Y(t)$  для управляемого возбужденного брюсселятора ( $y_*=2.5$ ).

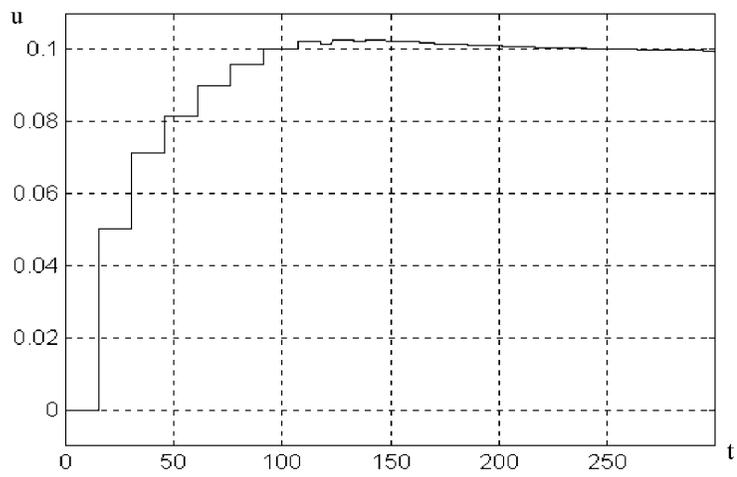


Рис. 13.6. График  $u(t)$  для управляемого возбужденного брюсселятора ( $y_*=2.5$ ).

объекта управления ( $\gamma > 0$  – коэффициент усиления адаптации)

$$\begin{aligned}\hat{a}_{k+1} &= \hat{a}_k - \gamma(y_k - y_*)y_k, \\ \hat{b}_{k+1} &= \hat{b}_k - \gamma(y_k - y_*)u_k.\end{aligned}\tag{13.52}$$

На рис. 13.3 показана зависимость  $Y(t)$  от времени  $t$  для цели управления (13.40) при  $y_* = 4.5$  ( $\max Y(t) \approx 3.55$  для неуправляемой системы). Были выбраны следующие начальные условия и значения параметров:  $A_0=2$ ;  $B=5.2$ ;  $X(0)=2$ ;  $Y(0) = 2.5$ ;  $\gamma=0.095$ ,  $\hat{a}_0=1$ ,  $\hat{b}_0=100$ .

Было обнаружено, что динамика брюсселятора может оказаться хаотической [68], если концентрация вещества  $A$  модулируется по гармоническому закону с малой амплитудой:  $A = A_0 + \tilde{a} \cos(\omega t)$ . Соответствующие значения параметров [68]:  $A_0 = 0.4$ ,  $B = 1.2$ ,  $\tilde{a} = 0.05$  и  $\omega = 0.81$ . Для указанных значений параметров существует хаотический аттрактор (рис. 13.4). Постановка задачи управления и адаптивный алгоритм управления не меняются в сравнении с рассмотренной задачей управления колебаниями брюсселятора. В этом случае  $A = A_0 + \tilde{a} \cos(\omega t) + u(t)$ ,  $y_k = Y(t_k)$ . Значения параметров системы  $A_0, B, \tilde{a}$  и  $\omega$  предполагаются неизвестными. Цель управления состоит в удержании значений локальных максимумов  $Y(t)$  на данном уровне  $y_*$  с помощью целенаправленного изменения  $u(t)$  в моменты времени  $t_k$ .

На рис. 13.5, 13.6 показаны зависимости  $Y(t)$  и  $u(t)$  от времени  $t$  при  $y_*=2.5$  ( $\max Y(t) \approx 3.2$  для неуправляемой системы). Для моделирования были выбраны следующие начальные условия и значения параметров:  $X(0)=0.5$ ;  $Y(0)=1.0$ . Моделирование показало, что цель управления (13.40) также достигается для других значений  $y_*$ , вплоть до  $y_*=3.5$ .

### 13.4.3. Адаптивное управление моделью Рёсслера

В настоящей главе моделированием исследуется вопрос о необходимости введения ограничения на величину управления и возможности достижения цели управления с помощью такого ограничения посредством малого управления.

Рассмотрим модель динамики химической реакции, протекающей в некоторой емкости с перемешиванием и предложен-

Рис. 13.7. Хаотический аттрактор системы Рёсслера.

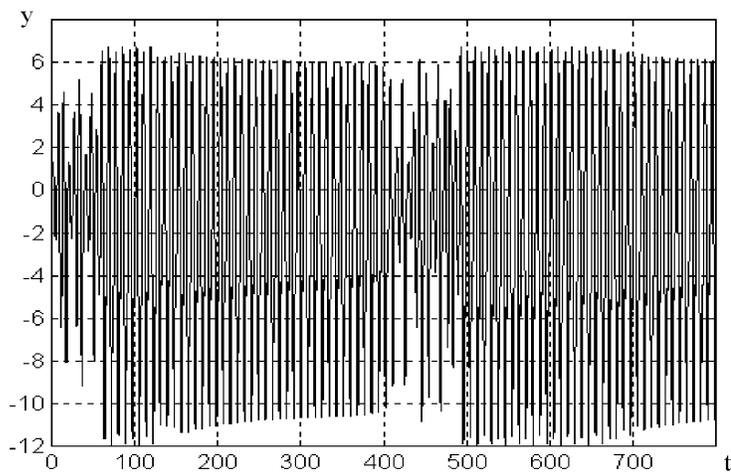


Рис. 13.8. График координаты  $Y(t)$  ( $y_* = 6$ ).

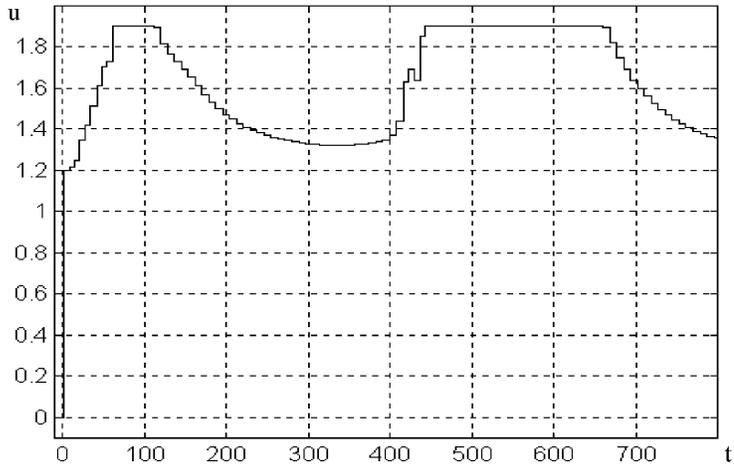


Рис. 13.9. График управления  $u(t)$  ( $y_* = 6$ ).

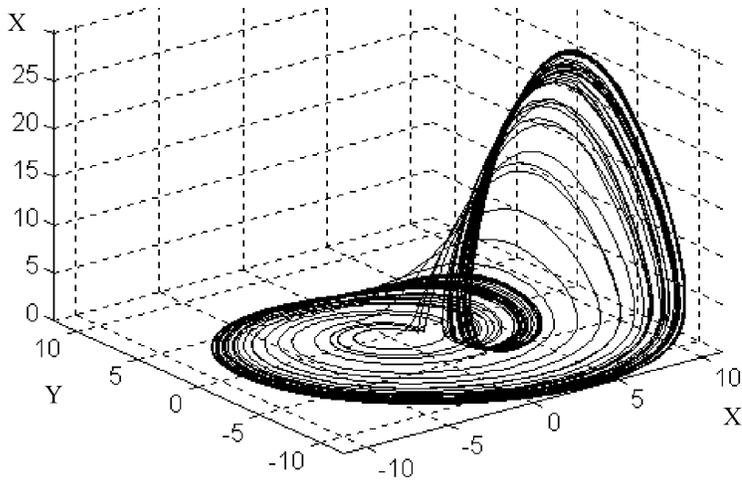


Рис. 13.10. Фазовый портрет управляемой модели Рёсслера ( $y_* = 6$ ).

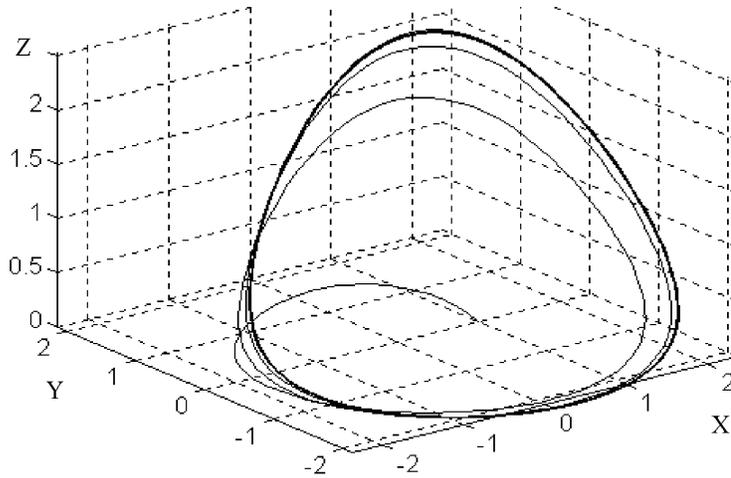


Рис. 13.11. Предельный цикл первого порядка в системе Рёсслера.

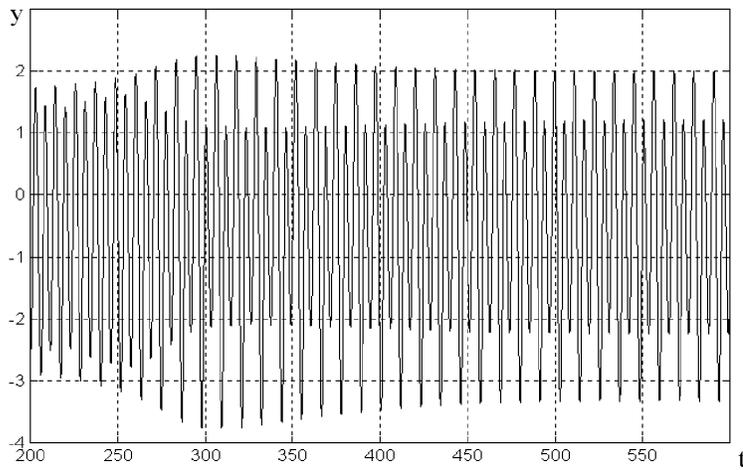


Рис. 13.12. График координаты  $Y(t)$  ( $y_* = 2$ ).

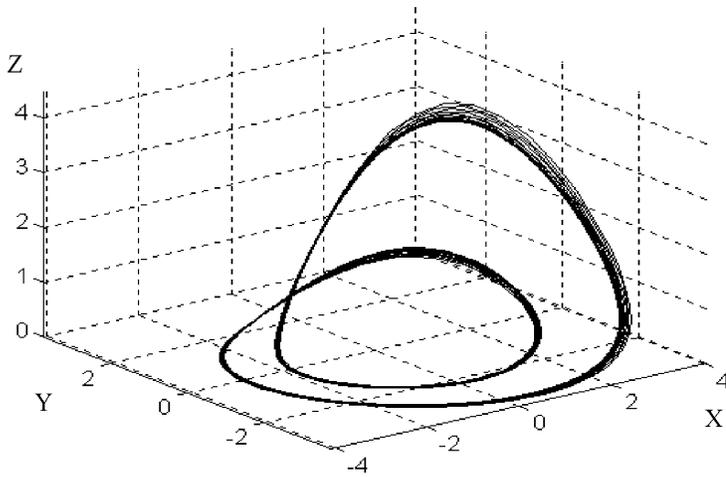


Рис. 13.13. Фазовый портрет управляемой модели Рёсслера ( $y_* = 2$ ).

ной О. Рёсслером в 1976 г. [68, 70]:

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z, \\ \dot{Y} = X + AY, \\ \dot{Z} = BX - CZ + XZ, \end{cases} \quad (13.53)$$

где  $A, B, C$  – положительные параметры. У этой модели имеется неустойчивое положение равновесия в точке  $X = Y = Z = 0$ , и при некоторых значениях параметров  $A, B, C$  динамика системы (13.53) становится хаотической [70], как показано на рис. 13.7.

Рассмотрим следующую задачу управления. Пусть  $t_k$  – те моменты времени, в которые переменная  $Y(t)$  достигает своего  $k$ -го локального максимума. Соответствующее максимальное значение обозначим  $y_k = Y(t_k)$ . Пусть управляющее воздействие будет кусочно-постоянной функцией, изменяющей значение параметра  $C$  в моменты  $t_k$  с учетом измеренного значения  $y_k$ :  $C = C_0 + u(t)$ ,  $u(t) = u_k$  для  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Значения параметров системы  $A, B, C_0$  предполагаются неизвестными. Цель управления состоит в удержании значений локальных максимумов  $Y(t)$  на данном уровне  $y_*$  с помощью целенаправленного изменения  $u(t)$  в моменты времени  $t_k$ . Ли-

неаризованная модель ”вход-выход” (13.43) для рассматриваемой системы примет вид

$$y_{k+1} + a_1 y_k + a_2 y_{k-1} + a_3 y_{k-2} = b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + b_3 u_{k-2} + \varphi_k, \quad (13.54)$$

где  $u_k$  – управляющее воздействие;  $\{a_i\}_1^3$  и  $\{b_i\}_1^3$  – неизвестные коэффициенты;  $\varphi_k$  – ограниченная ошибка модели.

Адаптивный алгоритм управления включает в себя алгоритм управления основного контура

$$u_k = [y_* + \hat{a}_{1k} y_k + \hat{a}_{2k} y_{k-1} + \hat{a}_{3k} y_{k-2} - \hat{b}_{2k} u_{k-1} - \hat{b}_{3k} u_{k-2}] \hat{b}_{1k}^{-1}, \quad (13.55)$$

определяющий новое значение управляющего воздействия  $u_k$ , и алгоритм адаптации, основанный на результатах предыдущего параграфа и вычисляющий оценки  $\hat{a}_{i,k}$ ,  $\hat{b}_{i,k}$  параметров модели (13.54) объекта управления ( $\gamma > 0$  – коэффициент усиления адаптации):

$$\begin{aligned} \hat{a}_{i,k+1} &= \hat{a}_{i,k} - \gamma \vartheta_k y_{k-i+1}, & i &= 1, 2, 3 \\ \hat{b}_{i,k+1} &= \hat{b}_{i,k} - \gamma \vartheta_k u_{k-i}, & i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (13.56)$$

В соответствии с теоремой 1 число коэффициентов модели ”вход-выход” должно быть на единицу меньше размерности исходной непрерывной системы. Однако интересно исследовать вопрос об увеличении или уменьшении числа коэффициентов модели с точки зрения как сохранения работоспособности алгоритма, так и скорости сходимости алгоритма при достижении цели управления. Поэтому для модели Рёсслера были просчитаны модели ”вход-выход” для трех, двух и одного коэффициентов при прочих равных условиях. Моделирование показало, что цель управления достигается даже при простейшей модели с одним коэффициентом (видимо, это особенность конкретной системы), но в сравнении с моделью с тремя коэффициентами скорость сходимости существенно падает.

Теоретические результаты подверглись проверке посредством компьютерного моделирования с использованием пакета АДАМ [72], функционирующего в среде MATLAB. На рис. 13.8, рис. 13.9 показаны зависимости координаты  $Y(t)$  и управляющего воздействия  $u(t)$  как функции  $t$  для цели управления (13.40) при  $y_* = 6$  ( $\max Y(t) = 4.54$  для неуправляемой хаотической системы). Соответствующий фазовый портрет

показан на рис. 13.10. Для моделирования были выбраны следующие начальные условия:  $A=0.38$ ;  $B=0.3$ ;  $C_0=4.5$ ;  $X(0)=1$ ;  $Y(0)=Z(0)=0$ ;  $\gamma=0.005$ . Для модели "вход-выход" с тремя коэффициентами  $\hat{a}_i|_0=0$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\hat{b}_1|_0 = 5$ ,  $\hat{b}_{2,3}|_0 = 0$ .

Были обнаружены некоторые интересные свойства предложенных алгоритмов. Так, цель управления в рассматриваемой системе не достигается за разумное время моделирования процесса управления, если целевое значение  $y_*$  лежит внутри хаотического аттрактора модели Рёсслера. Видимо, это вызвано тем, что рассматривается модель сильно диссипативной системы (в этой связи можно сравнить достижение аналогичной цели управления в других системах даже малым управлением). Второе свойство состоит в необходимости ограничения управляющего воздействия (в приведенном выше примере  $\bar{u} = 1.9$ ): в отсутствие такого ограничения управляемая система может расходиться на нескольких первых шагах из-за большого значения и неизменности управления между точками достижения максимума выхода.

Рассмотрим также задачу стабилизации предельного цикла второго порядка. Модель Рёсслера имеет устойчивый предельный цикл первого порядка при значениях параметров  $A = 0.38$ ,  $B = 0.3$ ,  $C_0 = 1$  с максимальным значением  $Y_{max} \approx 0.8$  (рис. 13.11). При  $C_0 = 2.5$  имеется устойчивый предельный цикл второго порядка со значениями локальных максимумов  $Y_{max} \approx 1; 2.3$ . Таким образом, идеальное управление по параметру  $C$  заведомо существует. Необходимо достигнуть цели управления (13.40) с  $y_*=2$ , где  $y_*$  является максимальным за цикл значением  $Y(t)$ . Результаты моделирования показаны на рис. 13.12, рис. 13.13 и подтверждают работоспособность предложенного алгоритма, а также сходимости управляющего воздействия к идеальному значению.

### 13.5. Управление синхронизацией систем на основе адаптивных наблюдателей

В настоящем параграфе рассмотрена задача синхронизации двух нелинейных систем (приемника и передатчика, или объекта управления и эталонной модели) в условиях неполноты измерений и при неполной информации о параметрах систем. Строится алгоритм адаптивного управления синхронизацией на основе адаптивного наблюдателя. Устанавлива-

ются условия достижения синхронного режима при помощи квадратичной функции Ляпунова. Приводится пример адаптивной синхронизации двух цепей Чуа и обсуждаются применения в системах связи. Изложение основано на материале работы [151].

### 13.5.1. Идея управляемой синхронизации

Как указывалось в п. 13.1., в задаче синхронизации двух подсистем с векторами состояния  $x \in \mathcal{R}^n$  и  $z \in \mathcal{R}^n$  одинаковой размерности можно определить синхронный режим как выполнение соотношения  $x(t) - z(t) \equiv 0$  для всех  $t \geq 0$ , а целью синхронизации считать асимптотическое соотношение

$$\|x(t) - z(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (13.57)$$

При этом в нетривиальном случае движение каждой подсистемы остается колебательным и, в частности, может быть хаотическим.

В последние годы наблюдается возрастающий интерес исследователей к задаче синхронизации хаотических систем [181, 136, 128, 156, 153, 135]. Это вызвано не только научным интересом к задаче, но также ее практическими применениями для различных областей, в частности, – в телекоммуникации [37, 112]. Однако большинство методов синтеза предложены и обоснованы при условии, что все параметры системы известны и состояния доступны измерению. Кроме того, ряд методов применим только для систем невысокого порядка.

Практический интерес представляет задача синхронизации двух или более систем, в которой не только начальное состояние (передатчика), но и ряд его параметров неизвестны при построении приемника. Эта более сложная задача может соответствовать применению параметрической модуляции для передачи сообщений и относится к задачам *адаптивной синхронизации* [142, 143, 176]. Теория управления открывает новые горизонты в задаче синхронизации и позволяет предложить общие подходы для ее изучения [128].

Поясним идею управляемой синхронизации для упрощенного случая, когда ведущая система (эталонный генератор) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (13.58)$$

а ведомая (управляемый генератор) – уравнением

$$\dot{z} = f(z) + u(t), \quad (13.59)$$

где  $x, z, u$  –  $n$ -мерные векторы. Выбирая вектор сигналов обратной связи  $u(t)$  пропорциональным ошибке

$$u(t) = -Ke(t), \quad (13.60)$$

где  $e = x - z$  – вектор ошибок,  $K > 0$  – коэффициент усиления, получим уравнение ошибок

$$\dot{e} = f(x(t)) - f(x(t) - e) - Ke, \quad (13.61)$$

в котором  $x(t)$  – заданная функция времени, являющаяся решением (13.58). Если матрица Якоби  $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$  ограничена в некоторой области  $\Omega$ , содержащей решение системы (13.58)–(13.60), то легко подобрать такое  $K > 0$ , чтобы собственные числа симметричной матрицы  $A(x) + A^T(x) - 2KI_n$ , где  $I_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица, лежали левее мнимой оси при  $x \in \Omega$ . При этом, как известно [34], система (13.58)–(13.60) будет обладать свойством так называемой *конвергентности* в  $\Omega$ : все ее траектории, лежащие в  $\Omega$ , сходятся при  $t \rightarrow \infty$  к единственному ограниченному решению. Поскольку  $e(t) \equiv 0$  является решением (13.61), то к нему и сходятся все траектории. Таким образом, решения систем (13.58) и (13.59)–(13.60) неограниченно сближаются, что и означает синхронизацию двух систем. При этом поведение каждой из систем может быть и оставаться хаотическим.

В литературе получены условия управляемой синхронизации для более сложных задач: 1) при неполном измерении (когда измерению доступен лишь вектор выходных координат  $y = h(x)$ ); 2) при неполном управлении (когда  $u(t)$  является  $m$ -мерным вектором,  $m < n$  и вместо  $u(t)$  в (13.59) стоит  $Bu(t)$ , где  $B$  – прямоугольная  $m \times n$ -матрица). Были получены также условия адаптивной синхронизации (когда часть параметров математических моделей систем неизвестна) [143, 153, 176]. Один из вариантов этой задачи адаптивной синхронизации с передачей информации изложен в данном параграфе ниже.

Заметим, что задача синхронизации в формулировке (13.58)–(13.60) совпадает с традиционной для теории управления за-

дачей управления с эталонной моделью. В более общей постановке допускается взаимное влияние подсистем, что соответствует описанию подсистем в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, u, t), \quad y_1 = h_1(x); \\ \dot{z} &= f_2(z, u, t), \quad y_2 = h_2(z)\end{aligned}\quad (13.62)$$

и введению модели динамики связи (взаимовлияния):

$$\dot{w} = W(w, y_1, y_2, t), \quad u = U(w, y_1, y_2, t). \quad (13.63)$$

Критерий синхронизации может допускать также возможность сдвига фаз между процессами в синхронизируемых подсистемах [16, 17]. Особый интерес представляет *синхронизация слабой связью*, т.е. когда величина сигнала взаимосвязи  $u(t)$  предполагается малой.

Отметим также, что эффект синхронизации изучался в механике, начиная с работы Х. Гюйгенса (1673 г.), и имеет многочисленные применения, например в вибрационной технике [16, 17]. В традиционной для механики постановке задачи синхронизации система связи (13.63) считается заданной и требуется найти условия сходимости траекторий системы (13.62) – (13.63) к некоторой периодической траектории [16] или условия достижения иной цели синхронизации, например сходимости к нулю ошибки  $e(t) = x(t) - z(t)$ , т.е. задача является задачей анализа [56]. Мы же здесь говорим о задачах, где требуется найти подходящую систему связи (13.63), которая описывает регулятор или алгоритм взаимодействия и обеспечивает достижение заданной цели. Такие задачи относятся к классу задач синтеза (управляемой синхронизации). В теории управления, однако, методы их решения разработаны далеко не для всех практически важных случаев, несмотря на то что в последние несколько лет наблюдается необычайно быстрый, лавинообразный рост числа публикаций по управлению и синхронизации хаотических систем [112, 135, 153].

### 13.5.2. Постановка задачи и схема решения

Рассмотрим нелинейную систему (передатчик), уравнения которой имеют вид системы Лурье:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = Ax_d + \varphi_0(y_d) + B \sum_{i=1}^m \theta_i \varphi_i(y_d), \\ y_d = Cx_d \end{cases}, \quad (13.64)$$

где  $x_d \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния передатчика;  $y_d \in \mathcal{R}^l$  – вектор выходов (передаваемых сигналов);  $\theta = \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_m)$  – вектор параметров передатчика. Предполагается, что нелинейности  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , матрицы  $A, C$  и вектор  $B$  известны;  $\theta_1, \dots, \theta_m$  могут изменяться во времени, так как они содержат сообщение, которое подлежит передаче.

Пусть приемник представляет собой другую динамическую систему, которая производит оценки  $\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  параметров передатчика на основе наблюдения за передаваемым сигналом  $y_d(t)$ . Задача состоит в получении уравнений приемника

$$\dot{z} = F(z, y_d), \quad (13.65)$$

$$\hat{\theta} = h(z, y_d), \quad (13.66)$$

обеспечивающих сходимость

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(t) - \theta) = 0, \quad (13.67)$$

где  $\hat{\theta}(t) = \text{col}(\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_m(t))$  есть вектор оценок параметров.

Предлагаемый ниже приемник относится к классу адаптивных наблюдателей и (для случая известных матриц  $A, B, C$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \varphi_0(y_d) + B \left( \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i \varphi_i(y_d) + \hat{\theta}_0 G(y_d - y) \right), \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (13.68)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \psi_i(y_d, y), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (13.69)$$

где  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $y_d \in \mathcal{R}^l$ ,  $\theta_0 \in \mathcal{R}$ , а  $G \in \mathcal{R}^l$  является вектором весовых коэффициентов.

Синтез алгоритма адаптации (13.69) будет выполнен позже. Так как состоянием приемника является  $z = (x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \dots, \hat{\theta}_m)$ , то правые части (13.65) находятся из (13.68), (13.69).

Поскольку структуры (13.68) и (13.64) совпадают, естественной вспомогательной целью может служить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (13.70)$$

где  $e(t) = x(t) - x_d(t)$  есть ошибка наблюдения.

Хотя (13.70) не является необходимым для обеспечения (13.67), она может подсказать способ выбора подходящей функции Ляпунова для синтеза алгоритма адаптации (13.69).

Для решения задачи запишем уравнение ошибки:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B \left( \sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i \varphi_i(y_d) + \hat{\theta}_0 G \tilde{y} \right), \\ \tilde{y} = Ce \end{cases} \quad (13.71)$$

где  $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i, i = 1, \dots, m$  – ошибки оценки параметров. Алгоритм адаптации получается применением метода скоростного градиента имеет вид

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma_i (y - y_d) \varphi_i(y_d), \quad i = 1, \dots, m, \quad (13.72)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0 (y - y_d)^2, \quad (13.73)$$

### 13.5.3. Условия адаптивной синхронизации

Для вывода условий работоспособности предложенной схемы напомним некоторые определения и результаты.

**Определение 1 [106].** Система  $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u, y = \bar{C}x$  с передаточной матрицей  $W(\lambda) = \bar{C}(\lambda I - \bar{A})^{-1} \bar{B}$ , где  $u, y \in \mathcal{R}^l$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется *гипер-минимально-фазовой* если она *минимально-фазовая* (т.е. многочлен  $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) \det W(\lambda)$  гурвицев), и матрица  $\bar{C} \bar{B} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda)$  симметрична и положительно определена.  $\square$

Заметим, что для  $l = 1$  система  $n$ -го порядка гипер-минимально-фазовая, если числитель ее передаточной функции – гурвицев многочлен степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами, т.е. определение совпадает с определением строгой минимально-фазовости, введенным в главе 12.

**Определение 2.** Вектор-функция  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}^m$  называется *постоянно возбуждающей (ПВ)* на  $[0, \infty)$ , если она измерима и ограничена на  $[0, \infty)$  и существуют  $\alpha > 0, T > 0$  такие, что

$$\int_t^{t+T} f(s) f(s)^T ds \geq \alpha \mathbf{I} \quad (13.74)$$

для всех  $t \geq 0$   $\square$ . <sup>3</sup>

<sup>3</sup> См. также Приложение А.

**Лемма 1 [64, 103].** Пусть заданы матрицы  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, G$  размеров  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ ,  $m \times l$ . Положим  $\text{rank}(\bar{B}) = m$ . Тогда существуют положительно определенная  $n \times n$ -матрица  $P = P^T > 0$  и  $l \times m$ -матрица  $\theta_*$  такие, что

$$PA_* + A_*^T P < 0, \quad P\bar{B} = \bar{C}^T G^T, \quad A_* = \bar{A} + \bar{B}\theta_* G \bar{C}$$

тогда и только тогда, когда система  $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u$ ,  $y = G\bar{C}x$  гипер-минимально-фазовая.

Лемма 1 устанавливает условия существования обратной связи  $u = \theta_* y + v$ , при которой замкнутая система со входом  $v$  и выходом  $Gy$  строго пассивная. Она имеет непосредственное отношение к лемме Якубовича–Калмана, поэтому может быть названа "леммой Якубовича–Калмана для систем с обратной связью", см. [14, 64, 119].

**Лемма 2 [64, 103].** Рассмотрим вектор-функции  $f, \tilde{\theta} : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}^m$ . Предположим, что  $\tilde{\theta}(t)$  непрерывно-дифференцируема,  $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $f$  – ПВ. Тогда, если  $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\tilde{\theta}(t)^T f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Условия адаптивной синхронизации сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Предположим, что все траектории передатчика (13.64) ограничены и линейная система с передаточной функцией  $W(\lambda) = GC(\lambda I - A)^{-1}B$  гипер-минимально-фазовая. Тогда все траектории передатчика (13.68), (13.72), (13.73) ограничены и выполнено (13.70). Если, кроме того, вектор-функция  $(\varphi_1(y_d), \dots, \varphi_m(y_d))$  удовлетворяет условию ПВ, то также имеет место (13.67).

**Доказательство.** Для доказательства теоремы рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}, t) = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \|\hat{\theta}_i - \theta_i\|^2 / \gamma_i + \|\hat{\theta}_0 - \theta_{*0}\|^2 / \gamma_0, \quad (13.75)$$

где матрица  $P = P^T > 0$  и число  $\theta_{*0}$  следует определить. Вычисление  $\dot{V}$  дает, что  $\dot{V} < 0$  при  $\epsilon \neq 0$  имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0 e^T P B G C e, \\ \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i e^T P B \varphi_i(y_d), \end{cases} \quad (13.76)$$

Применяя лемму 1, получим, что  $\dot{V} < 0$  при  $e \neq 0$  тогда и только тогда, когда алгоритм адаптации имеет вид (13.72), (13.73) и система  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  является гипер-минимально-фазовой. Поэтому функция  $V(t) = V(x(t), \hat{\theta}_0(t), \hat{\theta}(t), t)$  ограничена. Следовательно (так как  $\varphi_i(y_d(t)), i = 1, \dots, m$  ограничены), также ограничены функции  $e(t)$ ,  $\hat{\theta}_i(t)$ . Далее, из уравнений (13.76) следует, что  $\dot{V} = e^T(PA_* + A_*^T P)e \leq -\mu \|e(t)\|^2$  для некоторого  $\mu > 0$ . Интегрирование последнего уравнения на интервале  $[0, t]$  дает  $V(t) - V(0) \leq -\mu \int_0^t \|e(s)\|^2 ds$ . Принимая во внимание, что  $V \geq 0$ , получим:  $V(0) \geq \mu \int_0^t \|e(s)\|^2 ds$ . Отсюда следует неравенство

$$\int_0^\infty \|e(t)\|^2 dt < \infty. \quad (13.77)$$

Так как  $\varphi_i(y_d), i = 1, \dots, m$ , ограничены, то ввиду (13.71),  $\dot{e}(t)$  тоже ограничено. Из (13.77) и леммы Барбалата (см. [64], лемма 2.1) получим, что достигается цель (13.70).

Для доказательства (13.67) заметим сначала, что из (13.70) и (13.72) следует, что  $\dot{\theta}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Дифференцированием (13.71), из ограниченности функций  $e, \tilde{\theta}, \varphi_d, \tilde{y}, \hat{\theta}_0$  и их производных по времени заключаем, что  $\ddot{e}(t)$  ограничено. Лемма Барбалата влечет, что  $\dot{e}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда и из (13.72) получим, что  $\dot{\theta}(t)^T \varphi_d(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Наконец, (13.67) следует из условия ПВ и леммы 2. ■

**З а м е ч а н и е.** Теорема 1 фактически дает необходимое и достаточное условие существования функции Ляпунова вида (13.75) со свойствами

$$\begin{cases} V(x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}, t) > 0 \text{ при } e \neq 0, \\ \dot{V}(x, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}, t) < 0 \text{ при } e \neq 0. \end{cases} \quad (13.78)$$

Это означает, что нет другого алгоритма адаптации, основанного на функции Ляпунова (13.75) со свойствами (13.78).

В качестве примера далее рассмотрена задача синхронизации двух цепей Чуа с неизвестными параметрами и неполными измерениями.

#### 13.5.4. Передача сообщений с использованием систем Чуа

Пусть в качестве передатчика и приемника используются системы Чуа (см. 13.3). Модель передатчика в безразмерной

форме имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_{d_1} &= p(x_{d_2} - x_{d_1} + f(x_{d_1}) + sf_1(x_{d_1})) \\ \dot{x}_{d_2} &= x_{d_1} - x_{d_2} + x_{d_3} \\ \dot{x}_{d_3} &= -qx_{d_2}\end{aligned}\quad (13.79)$$

где  $f(z) = M_0z + 0.5(M_1 - M_0)f_1(z)$ ;  $f_1(z) = |z + 1| - |z - 1|$ ;  $M_0, M_1, p, q$  – параметры передатчика. Пусть  $s = s(t)$  – сообщение, которое следует восстановить в приемнике. Предположим, что передаваемый сигнал имеет вид  $y_d(t) = x_{d_1}(t)$  и известны значения параметров  $p, q$ .

Параметры  $M_0, M_1$  считаются а priori неизвестными, что мотивирует к использованию адаптации при синтезе приемника. В соответствии с вышеизложенным, приемник описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p(x_2 - x_1 + f(y_d) + c_1f_1(y_d) + c_0(x_1 - y_d)), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -qx_2,\end{aligned}\quad (13.80)$$

где  $c_0, c_1$  – настраиваемые параметры. Алгоритм адаптации (13.72), (13.73) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{c}_0 &= -\gamma_0(y_d - x_1)^2, \\ \dot{c}_1 &= -\gamma_1(x_1 - y_d)f_1(y_d),\end{aligned}\quad (13.81)$$

где  $\gamma_0, \gamma_1$  – коэффициенты усиления алгоритма.

Исследуем возможность системы (13.80), (13.81) получать и декодировать сообщения. Для этого проверим условия теоремы 1, предполагая, что  $s(t) = \text{const}$ .<sup>4</sup> Из уравнения ошибки следует

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = p(e_2 - e_1 + (c_1 - s)f_1(y_d) + c_0e_1) \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ \dot{e}_3 = -qe_2, \end{cases}\quad (13.82)$$

где  $e_i = x_i - x_{d_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Система (13.82), очевидно, имеет форму Лурье (13.71), где

$$A = \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -q & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0],$$

<sup>4</sup> Если  $s(t)$  – изменяющийся во времени, например, двоичный сигнал, теорема 1, строго говоря, неприменима. Однако, если оценки параметров происходят достаточно быстро, во всяком случае, быстрее, чем происходит модуляция параметров передатчика, то сообщение будет принято приемником.

$$\hat{\theta}_1 = c_1, \theta_1 = s, \theta_0 = c_0.$$

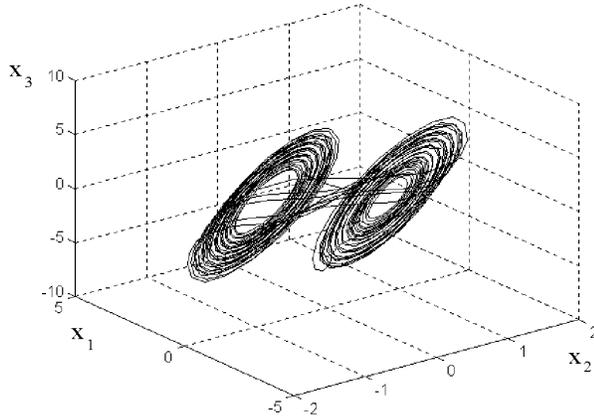


Рис. 13.14. Аттрактор системы (13.79).

Передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \lambda + q}{\lambda^3 + (p+1)\lambda^2 + q\lambda + pq}. \quad (13.83)$$

Видно, что порядок системы  $n = 3$ , а, так как числитель – гурвицев многочлен степени 2 для всех  $q > 0$  и и всех вещественных  $p$ . Следовательно, условие гипер-минимально-фазовости выполнено при  $q > 0$  и любых  $p, M_0, M_1$ . Таким образом, теорема 1 обеспечивает ограниченность всех траекторий приемника  $x(t)$  и сходимость ошибки наблюдения:  $e(t) \rightarrow 0$ . В частности,  $y_d(t) - x_1(t) \rightarrow 0$ . Далее, для того чтобы иметь возможность восстановить сигнал  $s(t)$ , приемник должен обеспечить сходимость  $c_1(t) - s \rightarrow 0$  для каждой постоянной  $s$ . Согласно теореме 1, это имеет место при выполнении условия ПВ, (см. определение 2), которое в данном случае записывается как

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f_1^2(y_d(t)) dt \geq \alpha \quad (13.84)$$

для некоторых  $T > 0, \alpha > 0$  и всех  $t_0 \geq 0$ . Для проверки (13.84) заметим, что условие (13.84) по существу означает,

что траектория передатчика  $x_d(t)$  не сходится на плоскость  $x_{d_1} = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Но это верно, когда система (13.79) обладает хаотическим поведением. Действительно, в этом случае значение  $x_{d_1}(t)$  покидает интервал  $(-1, 1)$ , (где  $f_1(z)$  линейна), неограниченное число раз, скажем, в моменты  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Интервалы времени  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  между  $t_k$  могут быть ограничены некоторой константой, если траектория не сходится к множеству  $x_{d_1} = 0$ . Можно найти также нижнюю границу для  $\alpha$  в (13.84):

$$\alpha_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_1^2(x_{d_1}(t)) dt. \quad (13.85)$$

Значение  $\alpha_0$  характеризует скорость сходимости оценок параметров. Это следует из известных результатов по скорости сходимости (см., например, [36]) так что если  $\alpha_0 > 0$ , то  $c_1(t) - s \rightarrow 0$  сходится экспоненциально с показателем сходимости не менее  $\gamma_1 \alpha_0$  для достаточно малых  $\gamma_1 > 0$ . Из свойства эргодичности вытекает, что

$$\alpha_0 \geq \frac{\overline{x_{d_1}^2}}{\mu}, \quad (13.86)$$

где  $\overline{x_{d_1}^2}$  – среднее значение  $x_{d_1}^2(t)$  на аттракторе  $\Omega$  и  $\mu = \sup_{x \in \Omega} |x_{d_1}(t)|$ .

Приведем результаты моделирования описанной выше системы. Примем следующие значения параметров  $p = 9$ ,  $q = 14.286$ ,  $M_0 = 5/7$ ,  $M_1 = -\frac{6}{7}$ . Для этих значений параметров система (13.79) обладает стохастическим хаотическим аттрактором (рис. 13.14). Начальное состояние передатчика  $x_d(0) = [0.3, 0.3, 0.3]$ . Как начальное состояние приемника  $x_0$ , так и начальные значения настраиваемых параметров  $c_0(0)$ ,  $c_1(0)$  приняты нулевыми. Для устранения влияния начальных условий никакое сообщение не передавалось в течение первых 20 с ("настройка", или "калибровка", приемника), т.е. принято  $s(t) \equiv 1$  для  $0 \leq t \leq 20$  с.

Процессы изменения ошибки наблюдения (рис. 13.15) и оценок параметров (рис. 13.16) показывают, что как ошибки наблюдения, так и параметрические отклонения  $c_1(t) - s$  со временем быстро затухают. Значение  $c_0(t)$  стремится к

некоторой постоянной величине.

После периода настройки, передается сообщение, имеющее вид "прямоугольной волны":

$$s(t) = s_0 + s_1 \operatorname{sign} \sin \left( \frac{2\pi t}{T_0} \right), \quad (13.87)$$

где  $s_0 = 1.005$ ,  $s_2 = 0.005$ . Результаты моделирования для  $T_0 = 5.0$  с,  $\gamma_1 = 1.0$  показаны на рис. 13.16, 13.17. Как видно из графиков, восстановленный сигнал  $y(t)$  совпадает с переданным сигналом  $y_d(t)$  с очень высокой точностью (ошибка  $y_d(t) - y(t)$  показана на рис. 13.16 жирной линией). Однако как ошибки наблюдения, так и ошибки идентификации параметров не исчезают полностью за время постоянства  $s(t)$ . Тем не менее, достоверное восстановление сигнала  $s(t)$  вполне возможно. Точность оценивания может быть повышена за счет увеличения коэффициента усиления в алгоритме адаптации  $\gamma_1$ , что подтверждается результатами моделирования для  $\gamma_1 = 5.0$  (рис. 13.18, 13.19). Разумеется, в реальных условиях, т.е. при учете помех в канале измерений, достижимая скорость передачи информации ограничена и зависит от наибольшей частоты спектра несущего сигнала.

**Заключение** Предложенная схема синхронизации, основанная на применении адаптивного наблюдателя показывает хорошие возможности по оценке параметров и состояний. Она позволяет достичь высокой скорости передачи информации. Эти результаты демонстрируют плодотворность применения современной теории нелинейного и адаптивного управления в новых прикладных задачах.

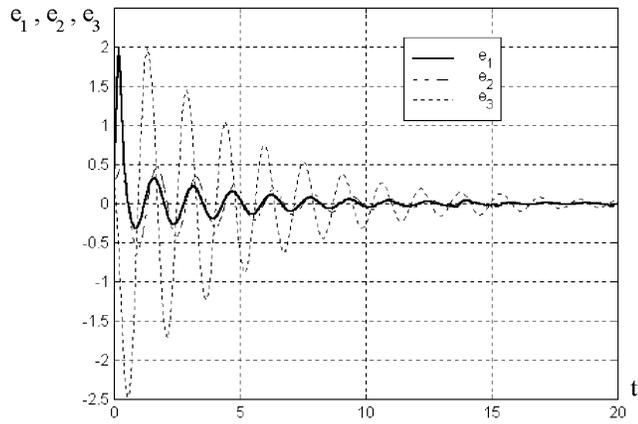


Рис. 13.15. Изменение ошибок наблюдения во время "настройки" ( $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1$ ).

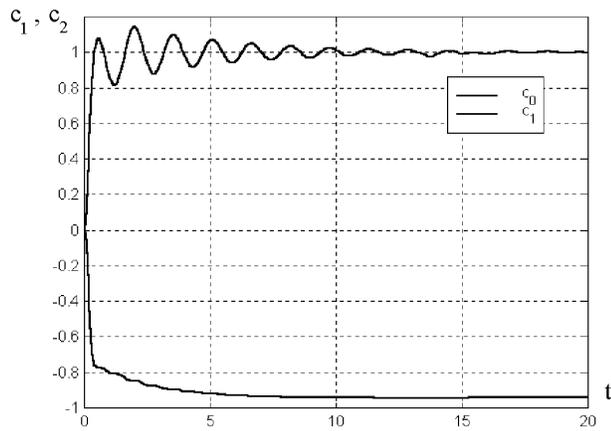


Рис. 13.16. Изменение оценок параметров при настройке.

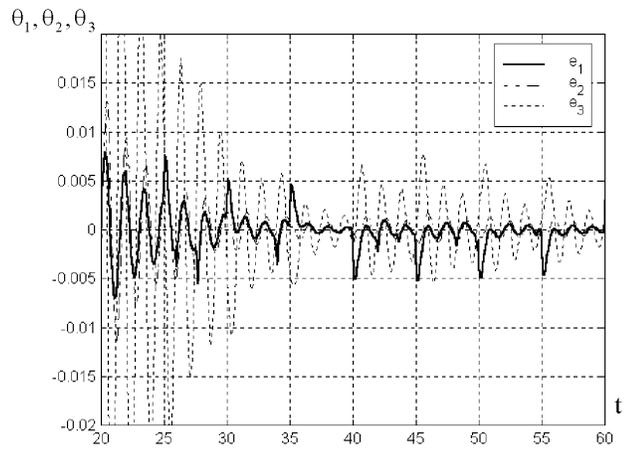


Рис. 13.17. Изменение ошибок наблюдения в процессе работы при  $\gamma_1 = 1$ .

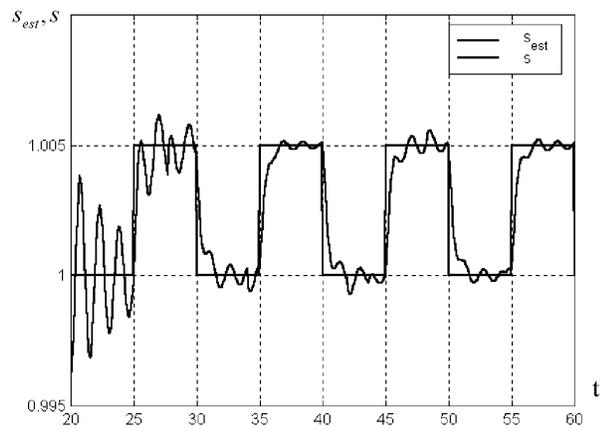


Рис. 13.18. Изменение оценки параметра  $s$  в процессе работы.

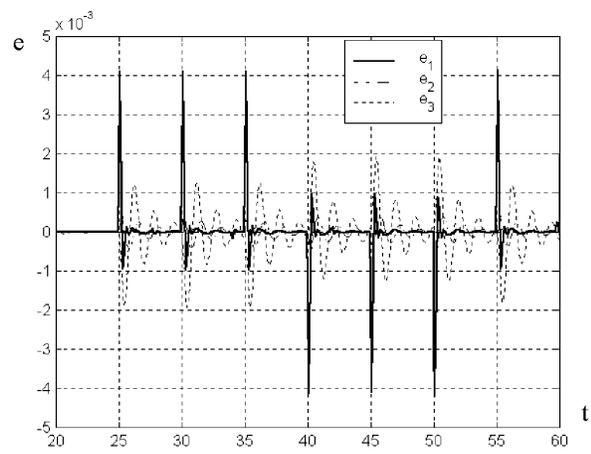


Рис. 13.19. Изменение ошибок наблюдения в процессе работы при  $\gamma_1 = 5$ .

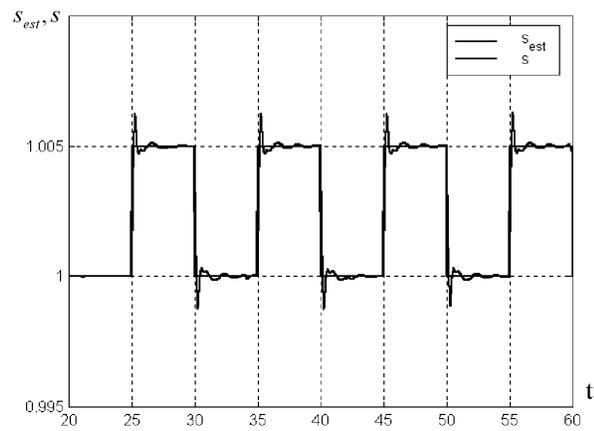


Рис. 13.20. Изменение оценки параметра  $s$ ;  $\gamma_1 = 5$ .

## А. Приложение А. МЕТОД СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА

### Описание метода. Алгоритмы скоростного градиента

Рассмотрим описание объекта управления в виде

$$\dot{x}(t) = f(x, \theta, t), \quad (\text{A.1})$$

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния объекта;  $\theta(t) \in \mathcal{R}^m$  – вектор управления (вектор входа); <sup>1</sup>,  $f(\cdot)$  – непрерывная по  $x, \theta, t$  вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по  $\theta$ .

Рассматриваются *допустимые законы (алгоритмы) управления* в виде

$$\theta(t) = \Theta(\{x(s)_{s=0}^t\}, \{\theta(s)_{s=0}^t\}) \quad (\text{A.2})$$

с некоторым оператором  $\Theta$  таким, что решения системы (A.1), (A.2) существуют и единственны при  $t \geq 0$  для любых начальных значений  $x(0), \theta(0)$ .

Требуется, чтобы выполнялась некоторая цель управления, заданная, например, в виде асимптотического соотношения

$$Q_t \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.3})$$

или неравенства

$$Q_t \leq \Delta, \quad \text{для всех } t \geq t_*, \quad (\text{A.4})$$

где  $Q_t = Q(\{x(s)_{s=0}^t\}, \{\theta(s)_{s=0}^t\})$  – заданный *целевой функционал (функционал качества)*,  $t_* \in \mathcal{R} < \infty$ .

Рассматриваются два вида функционалов [106]

1. *Локальный целевой функционал*

$$Q_t = Q(x(t), t), \quad Q(\cdot) \in \mathcal{R};$$

---

<sup>1</sup> Здесь использован некоторый "обобщенный" входной вектор  $\theta$ . В дальнейшем  $\theta$  имеет различный смысл в зависимости от характера решаемой задачи, чем вызвано отступление от принятого ранее обозначения. Например,  $\theta$  может быть собственно управляющим воздействием (сигналом), поступающим на вход объекта, либо, например, вектором настраиваемых параметров регулятора. Во втором случае (A.1) есть уравнения *обобщенного настраиваемого объекта*.

## 2. Интегральный целевой функционал

$$Q_t = \int_0^t q(x(s), \theta(s), s) ds, \quad q(\cdot) \in \mathcal{R}.$$

В конкретных задачах цель управления может содержать некоторые дополнительные условия. Например, для интегрального целевого функционала используется и дополнительная цель управления в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(x(s), \theta(s), s) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Рассмотрим теперь основные формы *алгоритмов скоростного градиента* и условия их применения [9, 103, 106].

Пусть закон управления имеет вид

$$\frac{d(\theta + \psi(x, \theta, t))}{dt} = -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t), \quad (\text{A.6})$$

где  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  –  $m \times m$ -матрица;  $\omega(x, \theta, t)$  – производная целевого функционала в силу системы (A.1); <sup>2</sup>,  $\psi(x, \theta, t)$  – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая *условию псевдоградиентности* [78]:

$$\psi(x, \theta, t)^T = \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

Например, в качестве  $\psi(x, \theta, t)$  можно брать

$$\psi(x, \theta, t) = \Gamma_1 \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t), \quad (\text{A.8})$$

$$\psi(x, \theta, t)^T = \Gamma_1 \text{sign}(\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)), \quad (\text{A.9})$$

где  $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$  –  $m \times m$ -матрицы ( $i = 1, 2$ ) и  $\Gamma_2$  – диагональная.

Алгоритмы вида (A.6) называются *алгоритмами скоростного градиента (АСГ) в конечно-дифференциальной форме*.

Имеются следующие условия применимости этих алгоритмов к решению задач управления с локальным целевым функционалом [106]. Пусть:

---

<sup>2</sup> Для локального целевого функционала  $\omega(x, \theta, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\nabla_x Q)^T f(x, \theta, t)$ , а для глобального целевого функционала –  $\omega(x, \theta, t) = q(x, \theta, t)$ .

- для всех  $v \in \mathcal{R}^m$  имеется единственное решение  $\theta = \kappa(x, v, t)$ ; уравнения  $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$ ,
- функции  $f(x, \theta, t)$ ,  $\nabla_x Q(x, t)$ ,  $\psi(x, \theta, t)$ ,  $\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)$  локально ограничены равномерно по  $t \geq 0$ ; <sup>3</sup>
- выполнено условие роста для  $\inf_{t \geq 0} Q(x, t)$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ ;
- функция  $\omega(x, \theta, t)$  выпукла по  $\theta$ ;
- существуют вектор  $\theta_* \in \mathcal{R}^m$  и функция  $\rho(Q)$  ( $\rho(Q) > 0$  при  $Q > 0$ ) такие, что для всех  $x, t$  имеет место

$$\omega(x, \theta_*, t) \leq -\rho(Q). \quad (\text{A.10})$$

Тогда все траектории системы с начальными условиями, принадлежащими множеству  $\Omega_0 \triangleq \{(x, \theta) : (\mathbf{I}_m - \Gamma^+ \Gamma)(\theta_0 - \theta_*) = 0\}$  ограничены и  $Q(x(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. цель управления достигается для любого  $\Delta > 0$ .

Для доказательства этого утверждения используем функцию Ляпунова вида [9]

$$V(x, \theta, t) = Q(x, t) + \frac{1}{2} \|\theta - \theta_* + \psi(x, \theta, t)\|_{\Gamma^+}^2 \quad (\text{A.11})$$

Вычисляя ее производную по времени в силу системы (A.1), (A.6), получим

$$\dot{V}_t = \omega(x(t), \theta(t), t) + v_t^T \Gamma \nabla_{\theta} \omega(x(t), \theta(t), t), \quad (\text{A.12})$$

где  $\omega(x, \theta, t)$  определяется выражением (A.6),  $v_t = \theta_t(t) - \theta_* + \psi(x(t), \theta(t), t)$ . Согласно условию,  $v_0 \in \mathcal{L}(\Gamma)$ , где  $\mathcal{L}(\Gamma)$  – линейная оболочка столбцов матрицы  $\Gamma^+$ . По алгоритму (A.6),  $\frac{dv_t}{dt} \in \mathcal{L}(\Gamma)$ . Следовательно,  $v_t \in \mathcal{L}(\Gamma)$  для всех  $t \geq 0$ , так что  $\Gamma^+ \Gamma v_t = v_t$  ( $\Gamma^+ \Gamma$  является проектором на множество  $\mathcal{L}(\Gamma)$ ). Таким образом, (A.12) принимает вид  $\dot{V}_t = \omega(x(t), \theta(t), t) + v_t^T \nabla_{\theta} \omega(x(t), \theta(t), t)$ . Применяя теперь условия выпуклости и достижимости, получаем  $\dot{V}_t \leq -\rho(Q(x(t), t)) \leq 0$ . Следовательно,  $V(x(t), \theta(t), t) \leq V(x(0), \theta(0), 0)$ , что доказывает ограниченность траекторий системы (A.1), (A.6). Итак,  $\int_0^{\infty} \rho(Q(x(t), t)) dt < \infty$ , откуда стандартным образом с помощью леммы Барбалата (см. напр., [103, 64]) выводится, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0$ , что и требовалось доказать.

<sup>3</sup> Ограничены в любом ограниченном множестве  $\{\|x\| + \|\theta\| \leq \beta, t \geq 0\}$ .

Для алгоритма (А.6) с интегральным целевым функционалом имеются следующие условия применимости (там же). Пусть:

- для всех  $v \in \mathcal{R}^m$  имеется единственное решение  $\theta = \kappa(x, v, t)$  уравнения  $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$ ;
- функции  $f(x, \theta, t)$ ,  $\nabla_{\theta}\omega(x, \theta, t)$ ,  $\kappa(x, \theta, t)$  локально ограничены;
- функция  $q(x, \theta, t)$  равномерно непрерывна по  $x, t$ ;
- функция  $\omega(x, \theta, t)$  выпукла по  $\theta$ ;
- имеется вектор  $\theta_* \in \mathcal{R}^m$  такой, что

$$\omega(x, \theta, t) \leq 0; \quad (\text{A.13})$$

- выполнено условие роста.

Тогда для любых  $x(0)$ ,  $\theta(0)$  в системе (А.1), (А.6) достигаются цели управления (А.4), (А.5) для

$$\Delta = Q_0 + 0.5 \|\theta_0 - \theta_* - \psi(x_0, \theta_0, 0)\|_{\Gamma+}^2.$$

Для единственности решения уравнения  $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$  существенно выполнение для  $\psi(x, \theta, t)$  условия Липшица по  $\theta$  с константой Липшица  $L < 1$ .

Условие роста можно ослабить, заменив на условие того, что ограниченность  $Q_t$  решений (А.1), (А.6) означает ограниченность  $x(t)$ .

Требование дифференцируемости  $\omega(x, \theta, t)$  и  $Q_t$  можно исключить, если градиент заменить на субградиент.<sup>4</sup>

Основными из указанных выше условий являются условия разрешимости (А.10), (А.13), которые показывают на принципиальную возможность решения поставленной задачи.

Частным случаем (А.6) являются АСГ в дифференциальной форме

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma \nabla_{\theta}\omega(x, \theta, t). \quad (\text{A.14})$$

Другой важный частный случай (А.6) – АСГ в конечной форме, который можно записать в виде

$$\theta = \theta_0 - \gamma\psi(x, \theta, t), \quad (\text{A.15})$$

---

<sup>4</sup> Вектор  $a \in \mathcal{R}^n$  такой, что для выпуклой функции  $f(x)$ , ( $x \in \mathcal{R}^n$ ) для всех  $y \in \mathcal{R}^n$  выполнено неравенство  $f(x+y) \geq f(x) + a^T y$  называется субградиентом функции  $f(x)$  в точке  $x$  и обозначается через  $\partial f(x)$  [78]. Для дифференцируемой в точке  $x$  функции имеет место  $\nabla f(x) \equiv \partial f(x)$ .

где  $\gamma > 0$  – параметр алгоритма (множитель шага).

Условия применимости алгоритма (A.15) для функций  $\psi(x, \theta, t)$ , удовлетворяющих условию *сильной псевдоградиентности*: существуют  $\rho > 0, \delta \geq 1$  такие, что

$$\psi(x, \theta, t) \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) \geq \rho \|\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)\|^{\delta} \quad (\text{A.16})$$

имеют следующий вид [9, 64, 106]

- Пусть имеется локальный целевой функционал,
- уравнение (A.15) разрешимо относительно  $\theta$ ;
- функция  $\omega(x, \theta, t)$  выпукла по  $\theta$ ;
- имеется вектор  $\theta_* = \theta_*(x, t)$ , удовлетворяющий условию (A.10) и условию

$$\rho \gamma(x, t) \|\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)\|^{\delta-1} \geq \|\theta_0 - \theta_*(x, t)\|; \quad (\text{A.17})$$

- выполнено (A.16).

Тогда в системе (A.6), (A.15) обеспечивается выполнение цели управления (A.4).

Для интегрального целевого функционала известно следующее утверждение.

- Пусть имеется интегральный целевой функционал,
  - уравнение (A.15) разрешимо относительно  $\theta$ ,
  - функция  $\omega(x, \theta, t)$  выпукла по  $\theta$ ,
  - удовлетворяется условие (A.16)
- тогда в системе (A.6), (A.15) обеспечивается выполнение цели управления (A.5).

#### Идентифицирующие свойства алгоритмов скоростного градиента

Вектор  $\theta_* \in \mathcal{R}^m$  в (A.10) можно считать некоторым ”идеальным” входным вектором, так как при  $\theta = \theta_*$  выполнены целевые условия. С прикладной точки зрения представляет интерес вопрос о сходимости  $\theta$  к  $\theta_*$ , т.е. вопрос о достижении в системе (A.1), (A.2) дополнительной цели управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_*. \quad (\text{A.18})$$

Этот вопрос возникает в первую очередь при решении задачи идентификации, когда  $\theta_*$  является вектором ”истинных” значений параметров объекта. Обобщая, алгоритм (A.2) называем *идентифицирующим алгоритмом*, если в системе (A.1), (A.2) достигается цель управления (A.18) [103].

Как известно, [36, 59, 74, 103], идентифицируемость системы зависит и от вида входного процесса. При достаточном "разнообразии" внешнего воздействия цель (A.18) может быть достигнута. Для точных формулировок используется следующее определение [9, 36, 103].

**Определение .** Матричная функция  $\Phi(t)$  размера  $m \times N$ , ограниченная для всех  $t > 0$ , называется *интегрально-невырожденной*, если существуют  $t_0 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $L > 0$  такие, что для всех  $t > t_0$  выполнено

$$\int_t^{t+L} \Phi(s)\Phi(s)^T ds \geq \alpha_0 \mathbf{I}_m. \quad \square \quad (\text{A.19})$$

Это условие показывает, что столбцы матрицы  $\Phi(t)$  не стремятся все при  $t \rightarrow \infty$  ни к какой гиперплоскости пространства  $\mathcal{R}^N$ .

Для дифференциальной формы АСГ (A.14) известно следующее утверждение Пусть:

- при  $\psi(x, \theta, t) \equiv 0$  выполнены указанные выше условия: для всех  $v \in \mathcal{R}^m$  имеется единственное решение  $\theta = \kappa(x, v, t)$  уравнения  $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$ ; функции  $f(x, \theta, t)$ ,  $\nabla_x Q(x, t)$ ,  $\psi(x, \theta, t)$ ,  $\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)$  локально ограничены; выполнено условие роста; функция  $\omega(x, \theta, t)$  выпукла по  $\theta$ ; существуют вектор  $\theta_* \in \mathcal{R}^m$  и функция  $\rho(Q)$  ( $\rho(Q) > 0$  при  $Q > 0$ ) такие, что для всех  $x, t$  имеет место  $\omega(x, \theta_*, t) \leq \rho(Q)$ , и, кроме того,

- $\inf_x Q(x, t)$  достигается в единственной точке  $x_*(t)$ , где функция  $x_*(t)$  удовлетворяет уравнению (A.1)  $\dot{x}(t) = f(x, \theta, t)$ ;

- функции  $\frac{\partial f(x, \theta, t)}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, \theta, t)}{\partial \theta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, \theta, t)}{\partial x \partial \theta}$ ,  $\nabla_x Q(x, t)$  непрерывны;

- функция  $\Phi(t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta, t)$  – интегрально-невырожденная.

Тогда АСГ в дифференциальной форме (A.14) является идентифицирующим алгоритмом для всех  $x(t_0)$ ,  $\theta(t_0)$  и решение  $\text{sol}\{x_*(t), \theta_*\}$  системы (A.1), (A.14) асимптотически устойчиво в целом равномерно по ограниченному множеству начальных условий  $x(t_0)$ ,  $\theta(t_0)$  и моменту времени  $t_0$  [103].

Практически указанные условия сводятся к требованию, чтобы входной ("возбуждающий") сигнал содержал не менее  $n$  гармоник с различными частотами. Это требование называют также *условием "неисчезающего возбуждения"* или *"постоянного возбуждения"*, подробнее см. [64, 106].

## В. Приложение В. МЕТОД КОНЕЧНО-СХОДЯЩИХ- СЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ ЦЕЛЕВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В 1966 г. В.А. Якубовичем было предложено приводить задачи распознавания образов и адаптации к задаче решения бесконечной системы *рекуррентных целевых неравенств*. Следуя [103], сформулируем ее в общем виде.

Пусть  $\{\theta\}$  – некоторое евклидово пространство, элементы которого – векторы  $\theta \in \{\theta\}$  называются векторами *подстраиваемых параметров*. Рассмотрим функции  $\phi_k(\theta, \theta_0^{k-1}) \in \mathcal{R}$ ,  $\psi_k(\theta, \theta_0^{k-1}) \in \mathcal{R}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  – дискретное время, а через  $\theta_0^{k-1}$  обозначены последовательности векторов  $\theta_0^{k-1} \triangleq [\theta[0], \theta[1], \dots, \theta[k-1]]$ . (Для краткости записи далее аргументы  $\theta_0^{k-1}$  у функций  $\phi(\cdot)$ ,  $\psi(\cdot)$  опускаются).

Пусть имеются *условные неравенства*

$$\phi_k(\theta) \geq 0 \quad (\text{В.1})$$

и *безусловные неравенства*

$$\psi_k(\theta) \geq 0 \quad (\text{В.2})$$

В задачах управления неравенства (В.1) порождают целью управления (отсюда и название метода), а неравенства (В.2) – ограничениями.

Положим также, что имеются множество  $\{\theta\}^0$  начальных значений вектора  $\theta[0]$  подстраиваемых параметров и правило

$$\theta[k+1] = T_k(\theta_0^k, \phi_0^k, \psi_0^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{В.3})$$

сопоставляющее набору  $\theta_0^k$  и наборам функций

$$\phi_0^k \triangleq \{\phi_0(\theta), \dots, \phi_k(\theta)\}, \quad \psi_0^k \triangleq \{\psi_0(\theta), \dots, \psi_k(\theta)\} \quad (\text{В.4})$$

значение  $\theta[k+1]$ . Тогда при заданных начальных условиях последовательно определяются  $\theta[k], \phi_k(\theta), \psi_k(\theta)$   $k = 0, 1, 2, \dots$ . Заметим, что неравенства (В.1), (В.2) заранее не заданы (при всех  $k$ ), а появляются на каждом шаге после вычисления  $\theta[k+1]$  по (В.3). Поэтому они называются *рекуррентными неравенствами*.

**Определение 1.** [103] Правило (В.3) называется *конечно-сходящимся алгоритмом (КСА) решения рекуррентных неравенств* (В.1) – условных и (В.2) – безусловных, если

а) для всех  $k$  выполнено (В.2) при  $\theta = \theta[k]$

б) существует такой момент времени  $k_*$ , что для всех  $k \geq k_*$  выполняются неравенства (В.1) и векторы  $\theta[k]$  устанавливаются:  $\theta[k_*] = \theta[k_* + 1] = \theta[k_* + 2] = \dots$

Если указанное свойство выполнено, но векторы  $\theta[k]$ , возможно, не устанавливаются, то (В.3) называется *конечно-решающим алгоритмом*.

Число моментов времени  $r$ , для которых при  $\theta = \theta[k]$  не выполняется (В.1), называется *числом ошибок (коррекций)* алгоритма.  $\square$

Рассмотрим некоторые виды конечно-сходящихся алгоритмов.

### 1. Алгоритм "Полоска-1"

Рассмотрим следующую систему условных рекуррентных неравенств в евклидовом пространстве  $\{\theta\}$ :

$$|(\varphi[k], \theta) + \alpha[k]| \leq \varepsilon[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{В.5})$$

Здесь  $\alpha[k] \in \mathcal{R}$ ,  $\varepsilon[k] \in \mathcal{R}$ , через  $(\varphi, \theta)$  обозначено скалярное произведение векторов  $\varphi$ ,  $\theta$  (для конечномерного пространства можно записать  $(\varphi[k], \theta) \equiv \varphi[k]^T \theta$ ).

Для каждого (фиксированного)  $k$  неравенство (В.5) определяет полосу между двумя параллельными плоскостями в пространстве  $\{\theta\}$ .

Предположим, что:

1. Существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $k \geq 0$  выполнено

$$\varepsilon[k] \geq \varepsilon \cdot |\varphi[k]|. \quad (\text{В.6})$$

2. Существуют вектор  $\theta_*$  и число  $\rho$ ,  $\rho \in [0, 1)$  такие, что для всех  $k \geq 0$  выполнено неравенство

$$|(\varphi[k], \theta_*) + \alpha[k]| \leq \rho \varepsilon[k]. \quad (\text{В.7})$$

Эти условия означают, что ширина полос не меньше  $2\varepsilon$  и что все полосы (В.5) содержат некоторый шар с центром в точке  $\theta_*$ .

Имеется следующее утверждение [103].

При выполнении условий 1, 2 для произвольного  $\kappa > \min(1, 2\rho)$  и любого  $\theta[0]$  алгоритм

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & \text{если } |\delta[k]| \leq \varepsilon[k], \\ \theta[k] - \frac{\delta[k]}{\|\varphi[k]\|^2} \varphi[k], & \text{если } |\delta[k]| \geq \kappa\varepsilon[k], \\ \theta[k] - \frac{\delta[k]\varphi[k] - \rho\varepsilon[k]\text{sign}\delta[k]}{\|\varphi[k]\|^2}, & \text{если } \varepsilon[k] < |\delta[k]| < \kappa\varepsilon[k], \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

где

$$\delta[k] \triangleq (\varphi[k]\theta[k]) + \alpha[k] \quad (\text{B.9})$$

является конечно-сходящимся алгоритмом решения безусловных неравенств (B.5).

Если положить  $\kappa = \infty$ , то второй случай будет всегда отсутствовать и алгоритм (B.8) принимает вид

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & \text{если } |\delta[k]| \leq \varepsilon[k], \\ \theta[k] - \frac{\delta[k]\varphi[k] - \rho\varepsilon[k]\text{sign}\delta[k]}{\|\varphi[k]\|^2}, & \text{если } \varepsilon[k] < |\delta[k]| < \kappa\varepsilon[k]. \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Если  $\rho < 0.5$ , то можно взять  $\kappa < 1$ ; тогда алгоритм (B.8) имеет вид

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & \text{если } |\delta[k]| \leq \varepsilon[k], \\ \theta[k] - \frac{\delta[k]}{\|\varphi[k]\|^2} \varphi[k], & \text{если } |\delta[k]| \geq \kappa\varepsilon[k]. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Можно также использовать алгоритм, имеющий некоторый свободный параметр шага (усиления)  $\mu[k]$ ,  $0 < \mu' \leq \mu[k] \leq \mu'' < 2$ :

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & \text{если } |\delta[k]| \leq \varepsilon[k], \\ \theta[k] - \mu[k] \frac{\delta[k]\varphi[k] - \rho\varepsilon[k]\text{sign}\delta[k]}{\|\varphi[k]\|^2}, & \text{если } \varepsilon[k] < |\delta[k]| < \kappa\varepsilon[k]. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Заметим, что приведенные алгоритмы можно использовать и для решения конечной системы неравенств, если (B.5) получать циклическим повторением исходной системы.

## 2. Алгоритм "Полоска-2"

Рассмотрим условные рекуррентные неравенства вида

$$|\beta[k] \cdot (\varphi[k], \theta) + \alpha[k]| \leq \varepsilon[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.13})$$

с некоторыми  $\beta[k] \in \mathcal{R}$ , которые считаются неизвестными (в задаче адаптивного управления – зависящими от неизвестных параметров).

Предполагается, следующее.

1. Существуют такие числа  $C_\beta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , что

$$0 < |\beta[k]| \leq C_\beta, \quad \varepsilon[k] \geq \varepsilon \cdot |\varphi[k]|; \quad (\text{B.14})$$

2. Существует такие вектор  $\theta_* \in \{\theta\}$  и число  $\rho$ ,  $\rho \in [0, 1)$ , что при  $\theta = \theta_*$  рекуррентные неравенства (B.13) выполнены "с запасом", т.е.

$$|\beta[k] \cdot (\varphi[k], \theta_*) + \alpha[k]| \leq \rho \varepsilon[k]. \quad (\text{B.15})$$

Конечно-сходящийся алгоритм решения рекуррентных неравенств (B.13) имеет вид [103]

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & \text{если } \nu[k] = 1, \\ \theta[k] - \mu[k] \frac{\delta[k] \text{sign}(\beta[k]) \varphi[k]}{\|\varphi[k]\|^2}, & \text{если } \nu[k] = -1, \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

где:

$$\begin{aligned} \nu[k] &= \text{sign}(\varepsilon[k] - |\delta[k]|), \\ \delta[k] &= \beta[k] \cdot (\varphi[k], \theta[k]) + \alpha[k], \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

а для  $\mu', \mu'', \mu[k]$  выполнено  $0 < \mu' \leq \mu[k] \leq \mu'' < 2(1 - \rho)C_\beta^{-1}$ .

Условия (B.6) или (B.14) в ряде задач могут и не выполняться. Это означает, что ширина полосок (B.5) или (B.13) может быть сколь угодно малой. Конечная сходимости алгоритмов в этом случае может нарушаться. Тем не менее эти алгоритмы будут конечно-решающими, а именно – справедливы следующие утверждения [103].

1. Пусть выполнено условие (B.7) и величина  $\delta[k]$  определена соотношением (B.9). Тогда для любого  $\theta[0]$  любой из алгоритмов (B.8) (где  $\kappa > \min(1, 2\rho)$ ), (B.10), (B.11) (при  $\rho < 0.5$ ), (B.12) (где  $0 < \mu' \leq \mu[k] \leq \mu'' < 2$ ) является конечно-решающим алгоритмом для неравенств

$$|(\varphi[k], \theta) + \alpha[k]| \leq \varepsilon'[k]. \quad (\text{B.18})$$

2. Пусть выполнено условие (B.15) и величины  $\nu[k]$ ,  $\delta[k]$  определены соотношениями (B.17). Тогда алгоритм (B.16) является конечно-решающим алгоритмом для неравенств

$$|\beta[k] \cdot (\varphi[k], \theta) + \alpha[k]| \leq \varepsilon'[k], \quad (\text{B.19})$$

где  $\varepsilon'[k] \geq \varepsilon^0 \|\varphi[k]\|$ ,  $\varepsilon^0 > 0$ ,  $0 < \beta[k] < C_\beta$ .

### 3. Алгоритмы решения рекуррентных линейных неравенств

Рассмотрим линейные условные неравенства

$$(\varphi[k], \theta) \geq 0, \quad (\text{B.20})$$

Пусть существует вектор  $\theta_*$ , для которого неравенства (B.20) выполнены "в усиленном смысле":

$$(\varphi[k], \theta_*) \geq \varepsilon_* > 0. \quad (\text{B.21})$$

Тогда для любого  $\theta[0]$  алгоритм

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & \text{если } (\varphi[k], \theta[k]) \geq 0, \\ \theta[k] + \zeta[k]\varphi[k], & \text{если } (\varphi[k], \theta[k]) < 0, \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

где  $\zeta[k] = \rho[k] - \beta[k] \frac{(\varphi[k], \theta[k])}{\|\varphi[k]\|^2}$ ,  $0 < \rho' \leq \rho[k] \leq \rho''$ ,  $\beta[k] \geq 0$

является конечно-сходящимся алгоритмом решения (B.20) [103].

Рассмотрим теперь условные неравенства

$$(\varphi[k], \theta) + \alpha[k] \geq 0. \quad (\text{B.23})$$

Пусть неравенства (B.23) выполнены "в усиленном смысле": существует вектор  $\theta_*$ , для которого

$$(\varphi[k], \theta_*) + \alpha[k] \geq \varepsilon_* > 0.$$

Тогда при  $|\alpha[k]| \leq C_\alpha$ ,  $\rho[k] > 0$ ,  $\rho[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\sum_1^\infty \rho[k] = \infty$ ,  $0 \leq \beta[k] \leq 2$  для любого  $\theta[0]$  и  $r[0]$  алгоритм

$$\begin{cases} \theta[k+1] = \theta[k], & r[k+1] = r[k], & \text{если } \delta[k] \geq 0, \\ \theta[k+1] = \theta[k] + \zeta[k]\varphi[k], & r[k+1] = r[k] + 1, & \text{если } \delta[k] < 0, \end{cases}$$

где  $\delta[k] = (\varphi[k], \theta[k]) + \alpha[k]$ ,  
 $\zeta[k] = \rho[r[k]] - \beta[k] \frac{\delta[k]}{\|\varphi[k]\|^2}$

является конечно-сходящимся алгоритмом решения (B.23) [103].

4. Алгоритм решения рекуррентных неравенств для общего случая

Рассмотрим теперь более общий случай, когда условные неравенства определяют (произвольные) выпуклые множества, а именно – пусть выполнены следующие условия:

1. Функция  $\phi(\theta)$  в (В.1) дифференцируема по векторному параметру  $\theta$  и

$$|\nabla_{\theta}\phi_k(\theta)|^2 \leq C_{\phi},$$

$C_{\phi}$  не зависит от  $k, \theta$ .

2. Существуют вектор  $\theta_* \in \{\theta\}$  и число  $\varepsilon_* > 0$  такие, что  $\forall k$  при  $\theta = \theta_*$  имеет место

$$\phi_k(\theta_*) \geq \varepsilon_*.$$

3.  $\forall k$  функция  $\phi_k(\theta)$  вогнута по параметру  $\theta$ .<sup>1</sup>

4. Числа  $\rho[k]$  удовлетворяют условиям:

$$\rho[k] > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho[k] = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho[i] = \infty.$$

Тогда для любого  $\theta[0]$  и при  $r[0] = 0$  алгоритм

$$\theta[k+1] = \begin{cases} \theta[k], & r[k+1] = r[k], \text{ если } \phi_k(\theta[k]) \geq 0, \\ \theta[k] + \zeta[k] \nabla_{\theta} \phi_k(\theta[k]), & r[k+1] = r[k] + 1, \\ & \text{если } \phi_k(\theta[k]) < 0, \end{cases} \quad (\text{В.24})$$

$$\text{где } \zeta[k] \triangleq \rho[r[k]] - \beta[k] \frac{\delta[k]}{\|\nabla_{\theta} \phi_k(\theta[k])\|^2}$$

является конечно-сходящимся алгоритмом решения условных рекуррентных неравенств (В.1) [103].

Значения  $\rho[k]$  можно вычислять, например, по формуле

$$\rho[k] = \frac{C_1}{C_2 + r[k]}, \quad \text{где постоянные } C_1 > 0, C_2 > 0.$$

Пусть наряду с условными (В.1) заданы также безусловные неравенства (В.2), которые определяют выпуклые множества  $\mathcal{D}[k] \subset \{\theta\}$ ,  $\theta_* \in \mathcal{D}[k]$  для всех  $k$ )<sup>2</sup> и определена операция

<sup>1</sup> Функция  $f(x)$  векторного аргумента  $x$  называется *вогнутой*, если  $\forall x', x''$  выполнено неравенство  $(x' - x'')^T \nabla_x f(x'') \geq f(x') - f(x'')$ .

<sup>2</sup> Множество  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$  называется *выпуклым*, если оно содержит всякий отрезок, концы которого принадлежат этому множеству, т.е.  $\forall x', x'' \in \mathcal{D}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x' + (1 - \lambda)x'' \in \mathcal{D}$ . Для вогнутой функции  $f(x)$  множество  $\mathcal{D} = \{x : f(x) \geq \varepsilon\}$  выпукло при любом  $\varepsilon$  [78].

проектирования  $P_{\mathcal{D}}[k]$  на эти множества. <sup>3</sup> Тогда суперпозиция операции  $P_{\mathcal{D}}[k]$  и алгоритма (В.24) является конечно-решающим алгоритмом для (В.1), (В.2), а если  $\mathcal{D}[k] \equiv \mathcal{D}$ , то данный алгоритм будет конечно-сходящимся.

Перечисленные алгоритмы и сформулированные условия их работоспособности могут применяться для решения самых разнообразных прикладных задач (см. п.п. 12.5, 13.4, а также примеры в [36, 103, 106]).

---

<sup>3</sup> Операцией проектирования на выпуклое множество  $\mathcal{D} \subset \{\theta\}$  называется операция  $P_{\mathcal{D}}$  такая, что  $\|P_{\mathcal{D}}\theta - \theta\| = \inf_{\theta' \in \mathcal{D}} \|\theta - \theta'\|$ .

## С. Приложение С. ФУНКЦИИ И ПОДПРОГРАММЫ ПАКЕТА MATLAB

В настоящем приложении даны описания основных процедур пакета MATLAB<sup>R</sup> ([72, 59, 81, 139]), которые применяются в задачах анализа и синтеза систем управления и используются в тексте данной книги.

### Программы общего назначения

**c = conv(a, b)**

CONV – вычисление свертки векторов.

C = conv(A, B) находит свертку векторов A и B. Результат есть вектор размера length(A)+length(B)-1. Если векторы A и B являются векторами коэффициентов многочленов, то свертка эквивалентна умножению многочленов.

См. также XCORR, DECONV, и CONV2.

**[x, cnt] = fmins(funfcn, x, tol, prnt)**

FMINs – находит минимум функции нескольких переменных, то есть выполняет нелинейную оптимизацию.

X = fmins('f', x0) начинает в точке x0 и вычисляет новый вектор x, при котором достигается минимум функции f(x). 'f' – строка, содержащая имя минимизируемой функции, обычно заданной в виде m-файла [72, 139].

X = fmins(F, X, tol) параметр tol служит для установки точности. Значение по умолчанию  $10^{-3}$ .

X = fmins(F, X, tol, 1) выводит краткую информацию о каждом шаге. [X, cnt] = fmins(F, X, ...) выводит также число шагов.

**[xf, termcode, path] = fsolve(fvec, x0, details, fparam,  
jac, scale)**

FSOLVE – решение системы нелинейных уравнений.

X = fsolve('f', X0) начиная с точки X0 вычисляет новый вектор X, являющийся решением  $f(x) = 0$ . 'f' – строка, содержащая имя функции, для которой следует получить решение, обычно - m-файла.

**y = logspace(d1, d2, n)**

LOGSPACE – создает вектор логарифмически равномерно расположенных значений.

logspace(d1, d2) создает вектор логарифмически равномерно расположенных значений в 50 точках между декадами  $10^{d1}$  и  $10^{d2}$ . Если  $d2 = \pi$ , тогда точки располагаются между  $10^{d1}$  и  $\pi$ . logspace(d1, d2, N) создает N значений.

См. также Linspace и ":".

**LTIFR** – вычисление частотной характеристики линейной стационарной системы.

$G = \text{ltifr}(A, b, s)$  вычисляет частотную характеристику системы

$$G(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1}b$$

для комплексных значений  $s$ . Вектор-столбец  $b$  должен иметь столько строк, сколько матрица  $A$ . Вычисляется матрица  $G$ , имеющая  $\text{size}(A)$  строк и  $\text{length}(s)$  столбцов.

$[x, y] = \text{meshdom}(x, y)$

MESHDOM – создает массивы X и Y для трехмерных графиков.

$[XX, YY] = \text{meshdom}(X, Y)$  преобразует области, заданные в X и Y в массивы XX и YY, которые могут использоваться для вычисления функций двух переменных и 3-мерной решетчатой графики.

$[\text{tout}, \text{yout}] = \text{ode45}(\text{FunFcn}, \text{t0}, \text{tfinal}, \text{y0}, \text{tol}, \text{trace})$

ODE45 – интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4 и 5-го порядков. См. также ODE23.

$[T, Y] = \text{ode45}(\text{'yprime'}, T0, Tfinal, Y0)$  интегрирует систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описанную в m-файле YPRIME.M на интервале от T0 до Tfinal с начальными условиями Y0.

$[T, Y] = \text{ode45}(F, T0, Tfinal, Y0, TOL, 1)$  использует точность TOL и выводит информацию о состоянии в процессе интегрирования.

**ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:**

F – строка содержащая имя пользовательской функции, в которой описываются решаемые уравнения. Вызов функции:  $\text{yprime} = \text{fun}(t, y)$

где F = 'fun'. t – время (аргумент интегрирования; скаляр), y – решение (вектор-столбец), yprime – вычисляемый вектор производных:  $\text{yprime}(i) \equiv \dot{y}_i(t)$ .

t0 – начальное значение t.

`tfinal` – конечное значение `t`.

`y0` – вектор-столбец начальных значений.

`tol` – требуемый допуск. Значение по умолчанию: `tol = 10-6`.

`trace` – при ненулевом значении каждый шаг выводится на печать. По умолчанию `trace = 0`.

**ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:**

`T` – полученный вектор-строка значений времени (аргумента интегрирования).

`Y` – полученное решение, по вектор-столбцу для каждого момента времени.

**`c = poly(x)`**

`POLY` – характеристический многочлен.

Если `A` –  $n \times n$ -матрица, `poly(A)` является вектором-строкой с  $n+1$  элементами, являющимися коэффициентами характеристического многочлена  $\det(\lambda I_n - A)$ . Если `V` – вектор, то `poly(V)` является вектором, элементы которого есть коэффициенты многочлена с заданными в `V` корнями. Для векторов `ROOTS` и `POLY` – взаимно обратные функции.

**`y = polyval(c, x)`**

`POLYVAL` – вычисление значения полинома.

Если `V` – вектор, элементы которого есть коэффициенты многочлена, то `polyval(V, s)` является значением полинома, вычисленным в точке `s`. Если `S` – матрица или вектор, то полином вычисляется при всех значениях `S`.

См. `POLYVALM` для вычисления матричного многочлена.

**`[coeffs, poles, k] = residue(u, v, k)`**

`RESIDUE` – разложение на простейшие дроби или вычисление вычетов.

`[R, P, K] = residue(B, A)` вычисляет вычеты, полюса и целую часть (т.е. разложение на простейшие) отношения двух многочленов `B` и `A`:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} + k(s).$$

Векторы `B` и `A` задают коэффициенты многочленов по убыванию степеней `s`. Вычеты содержатся в вектор-столбце `R`, полюса располагаются в вектор-столбце `P`, а целая часть – в вектор-строке `K`.

$[B, A] = \text{residue}(R, P, K)$  преобразует представление в виде простейших дробей обратно, в  $B/A$ -форму.

**r = roots(c)**

ROOTS – вычисляет корни полинома.

roots(C) вычисляет корни полинома, коэффициенты которого являются элементами вектора C. Если C имеет  $N+1$  компоненты, полином имеет вид  $C_1 X^N + \dots + C_N X + C_{N+1}$ .

См. также ROOTS1 и POLY.

**y = table1(tab, x0)**

TABLE1 – поиск по таблице.

$Y = \text{table1}(\text{TAB}, X0)$  по таблице строк TAB находит линейно-интерполированное значение, обращаясь со значением  $X0$  к первому столбцу TAB. Первый столбец таблицы должен быть монотонно возрастающим. Если значение  $X0$  выходит за границы первого столбца TAB.  $X0$  может быть вектором.

См. также TABLE2.

### Программы исследования систем управления

**X = are(F, G, H)**

ARE – Решение алгебраического уравнения Риккати

$X = \text{are}(F, G, H)$  возвращает решение (если оно имеется) алгебраического уравнения Риккати:

$$F^T X + X F - X G X + H = 0$$

где матрицы  $G=G^T \geq 0$ ,  $H=H^T$ .

**[Ab, Bb, Cb]=balreal(A, B, C)**

BALREAL – сбалансированная реализация уравнений состояния и понижение порядка модели.<sup>1</sup>

$[Ab, Bb, Cb] = \text{balreal}(A, B, C)$  возвращает сбалансированную реализацию уравнений состояния системы  $(A, B, C)$ .

$[Ab, Bb, Cb, G, T] = \text{balreal}(A, B, C)$  также возвращает вектор G, содержащий диагональные элементы грамиана сбалансированной реализации и матрицу T преобразования подобия, использованную при преобразовании  $(A, B, C)$  к  $(Ab, Bb, Cb)$ . Если нормализация системы выполнена успешно,

---

<sup>1</sup> Говорят, что квадратная матрица *сбалансирована*, если у нее, насколько возможно, нормы по строкам и столбцам совпадают [53].

малые элементы грамиана  $G$  показывают элементы, которые могут быть исключены при понижении порядка модели.

$$[\mathbf{mag}, \mathbf{phase}] = \mathbf{bode}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{i}, \mathbf{w})$$

**BODE** – амплитудно и фазо-частотные характеристики (диаграммы Боде) линейной системы непрерывного времени.

$[\mathbf{MAG}, \mathbf{PHASE}] = \mathbf{bode}(A, B, C, D, \mathbf{i}, \mathbf{W})$  вычисляет частотную характеристику системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{C.1})$$

от  $i$ -го входа при  $s = j\omega$ . Вектор  $\mathbf{W}$  должен содержать значения частот (в радианах), для которых требуется вычислить диаграммы Боде. **BODE** вычисляет матрицы **MAG** и **PHASE** (в градусах), число столбцов которых равно размерности выхода  $y$ , с  $\text{length}(\mathbf{W})$  строками.

$[\mathbf{MAG}, \mathbf{PHASE}] = \mathbf{bode}(\mathbf{NUM}, \mathbf{DEN}, \mathbf{W})$  вычисляет частотную характеристику системы, заданной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)}, \quad (\text{C.2})$$

где **NUM** и **DEN** содержат коэффициенты полиномов по убывающим степеням.

См. **LOGSPACE** для получения частот в логарифмическом масштабе.

$$\mathbf{Co} = \mathbf{ctrb}(A, B)$$

**CTRB** – формирование матрицы управляемости.

$\mathbf{ctrb}(A, B)$  возвращает матрицу управляемости

$$\mathbf{Co} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B].$$

$$[\mathbf{Abar}, \mathbf{Bbar}, \mathbf{Cbar}, \mathbf{T}, \mathbf{K}] = \mathbf{ctrbf}(A, B, C)$$

**CTRBF** – треугольная форма управляемости.

$[\mathbf{Abar}, \mathbf{Bbar}, \mathbf{Cbar}, \mathbf{T}, \mathbf{K}] = \mathbf{ctrbf}(A, B, C)$  возвращает разбиение на подпространства управляемых и неуправляемых состояний.

$[\mathbf{Abar}, \mathbf{Bbar}, \mathbf{Cbar}, \mathbf{T}, \mathbf{K}] = \mathbf{ctrbf}(A, B, C, \text{TOL})$  использует точность **TOL**.

Если матрица управляемости  $\mathbf{Co}(A, B)$  имеет  $\text{rank } r \leq n$ , то имеется преобразование подобия  $\mathbf{T}$  такое, что

$Abar = TAT', Bbar = TB, Cbar = CT', (T' = T^{-1})$  и преобразованная система имеет вид

$$Abar = \begin{bmatrix} Anc & 0 \\ A_{21} & Ac \end{bmatrix}, \quad Bbar = \begin{bmatrix} 0 \\ Bc \end{bmatrix}, \quad Cbar = [Cnc \quad Cc],$$

где пара  $(Ac, Bc)$  управляемая и  $Cc(sI - Ac)^{-1}Bc \equiv \equiv C(sI - A)^{-1}B$ .

$$[\mathbf{P}, \mathbf{G}] = \mathbf{c2d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$$

C2D – преобразование уравнений состояния непрерывной системы к дискретной форме.

$[\mathbf{P}, \mathbf{G}] = \mathbf{c2d}(A, B, T)$  преобразует систему непрерывного времени

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{C.3})$$

к уравнениям состояния дискретной системы

$$x[n + 1] = Px[n] + Gu[n] \quad (\text{C.4})$$

при экстраполяторе нулевого порядка входного сигнала и интервале дискретности (*выборочном интервале, sample time*) T.

$$[\mathbf{Wn}, \mathbf{Z}] = \mathbf{damp}(A)$$

DAMP – собственные частоты и коэффициенты демпфирования.

$[\mathbf{Wn}, \mathbf{Z}] = \mathbf{damp}(A)$  возвращает векторы Wn и Z, содержащие собственные частоты и коэффициенты демпфирования аргумента A. Переменная A может иметь один из следующих форматов:

- 1) если A квадратная, то предполагается, что это матрица "A" уравнений состояния;
- 2) если A – вектор-строка, то предполагается, что это вектор коэффициентов характеристического многочлена системы;
- 3) если A – вектор-столбец, то предполагается, что это вектор корней характеристического многочлена;

Во всех случаях, DAMP возвращает собственные частоты и коэффициенты демпфирования системы.

$$\mathbf{G} = \mathbf{dgram}(A, B)$$

DGRAM – грамианы управляемости и наблюдаемости дискретной системы.

$\text{dgram}(A, B)$  возвращает грамиан управляемости дискретной системы.

$\text{dgram}(A', C')$  возвращает грамиан наблюдаемости дискретной системы

См. также GRAM.

$$[L, M, P] = \text{dlqe}(A, G, C, Q, R)$$

DLQE – синтез дискретного линейного алгоритма оценивания по квадратичному критерию.

Для дискретной системы

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] + Gw[n] \quad - \text{уравнения состояния}$$

$$z[n] = Cx[n] + Du[n] + v[n] \quad - \text{уравнения измерений}$$

с моментами возмущений и шумов измерения:

$$E\{w\} = E\{v\} = 0, \quad E\{ww^T\} = Q, \quad E\{vv^T\} = R,$$

функция  $\text{dlqe}(A, G, C, Q, R)$  возвращает матрицу коэффициентов  $L$  дискретного стационарного фильтра Калмана:

– уравнение состояния

$$\bar{x}[n+1] = A\bar{x}[n] + Bu[n],$$

– уравнение измерений

$$x^*[n] = \bar{x}[n] + L(z[n] - H\bar{x}[n] - Du[n]).$$

Фильтр Калмана вырабатывает оптимальную по линейному квадратичному критерию (ЛКК) оценку  $x^*$  состояния  $x$ .

$[L, M, P] = \text{dlqe}(A, G, C, Q, R)$  возвращает матрицу коэффициентов передачи  $L$ , решение алгебраического уравнения Риккати  $M$  и ковариационную матрицу ошибок оценивания по результатам измерений  $P = E\{(x^* - x)(x^* - x)^T\}$ .

$$[K, S] = \text{dlqr}(A, B, Q, R)$$

DLQR – синтез линейного дискретного регулятора по квадратичному критерию.

$[K, S] = \text{dlqr}(A, B, Q, R)$  вычисляет оптимальную матрицу коэффициентов обратной связи  $K$  такую, что закон управления  $u = -Kx$  минимизирует функцию потерь  $J = \sum x^T Qx + u^T Ru$  при уравнении связи

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n].$$

Также возвращается установившееся решение  $S$  присоединенного дискретного матричного уравнения Риккати

$$S - A^T S A + A^T S B^{-1} (R + B^T S B) B S^T A - Q = 0.$$

**X = dlyap(A, C)**

DLYAP – решение дискретного уравнения Ляпунова.

$X = \text{dlyap}(A, C)$  находит решение дискретного уравнения Ляпунова

$$A X A^T + C = X.$$

См. также LYAP.

**[Ab, Bb, Cb, Db] = dmodred(A, B, C, D, ELIM)**

DMODRED – понижение порядка дискретной модели.

$[Ab, Bb, Cb, Db] = \text{dmodred}(A, B, C, D, \text{ELIM})$  уменьшает порядок модели, пренебрегая компонентами вектора состояния, описанными в векторе ELIM. Вектор состояния разделяется на X1, который сохраняется, и X2, который опускается,

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix}, \quad C = [C1 \quad C2],$$

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n], \quad y[n] = Cx[n] + Du[n].$$

$X2[n+1]$  приравнивается  $X2[n]$ , и полученные уравнения разрешаются относительно  $X1$ . Полученная система имеет на LENGTH(ELIM) меньшую размерность вектора состояния и может рассматриваться как система, у которой состояния ELIM изменяются мгновенно.

См. также DBALREAL, BALREAL и MODRED

**[a, b] = d2c(phi, gamma, t)**

D2C – преобразование уравнений состояния из дискретного времени в непрерывное.

$[A, B] = \text{d2c}(P, G, T)$  преобразует дискретную систему (C.4) к непрерывному виду уравнений состояния (C.3) при экстраполяторе нулевого порядка входного сигнала и интервале дискретности  $T$ .

**[mag, phase] = dbode(a, b, c, d, iu, w)**

DBODE – амплитудно- и фазо-частотные характеристики (диаграммы Боде) линейной системы дискретного времени.

`[MAG, PHASE] = dbode(A, B, C, D, iu, W)` вычисляет частотную характеристику системы (C.1) от  $i$ -го входа при  $z = e^{j\omega}$ . Вектор  $W$  должен содержать значения частот (в радианах), для которых требуется вычислить диаграммы Боде. Обычно  $\omega \leq \pi$ . `DBODE` вычисляет матрицы `MAG` и `PHASE` (в градусах), число столбцов которых равно размерности выхода  $y$  и `length(W)` строк.

`[MAG, PHASE] = dbode(NUM, DEN, W)` вычисляет частотную характеристику системы, заданной передаточной функцией

$$G(z) = \frac{NUM(z)}{DEN(z)}, \quad (C.5)$$

где `NUM` и `DEN` содержат коэффициенты полиномов по убывающим степеням.

`[y, x] = dimpulse(a, b, c, d, iu, n)`

`DIMPULSE` – функция веса (импульсная функция) дискретной линейной системы.

$Y = \text{dimpulse}(A, B, C, D, iu, n)$  вычисляет реакцию системы

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n], \quad y[n] = Cx[n] + Du[n] \quad (C.6)$$

на одиночный пробный сигнал ( $\delta$ -Кroneкера), приложенный к  $i$ -му входу. Целое  $n$  задает число точек, для которых следует получить функцию веса. `DIMPULSE` вычисляет матрицу  $Y$ , число столбцов которой равно размерности выхода  $y$  и  $n$  строк.

`[Y, X] = dimpulse(A, B, C, D, iu, n)` также возвращает процесс изменения состояния системы.

$Y = \text{dimpulse}(NUM, DEN, n)$  вычисляет функцию веса по описанию системы в виде передаточной функции (C.5), где `NUM`, `DEN` содержат расположенные по убыванию коэффициенты полиномов.

`[y, x] = dlsim(a, b, c, d, u, x0)`

`DLSIM` – моделирование дискретной линейной системы

$Y = \text{dlsim}(A, B, C, D, U)$  вычисляет реакцию системы (C.6) на входную последовательность  $U$ . Матрица  $U$  должна содержать такое количество столбцов, какова размерность входа  $u$ . Каждая строка  $U$  соответствует новому моменту времени. `DLSIM` формирует матрицу  $Y$ , число столбцов которой равно количеству значений выхода  $y$  и число `LENGTH(U)` строк.

$[Y, X] = \text{dlsim}(A, B, C, D, U)$  также возвращает процесс изменения состояния системы.

$\text{dlsim}(A, B, C, D, U, X0)$  можно использовать, если заданы (ненулевые) начальные условия.

$Y = \text{dlsim}(\text{NUM}, \text{DEN}, U)$  вычисляет переходный процесс в линейной дискретной системе, заданной передаточной функцией (С.5), где NUM и DEN содержат расположенные по убыванию коэффициенты полиномов.

$\text{dlsim}(\text{NUM}, \text{DEN}, U)$  эквивалентно  $\text{filter}(\text{NUM}, \text{DEN}, U)$ .

$[y, x] = \text{dstep}(a, b, c, d, iu, n)$

DSTEP – переходная функция дискретной линейной системы.

$Y = \text{dstep}(A, B, C, D, iu, n)$  вычисляет переходную функцию системы (С.6) по  $i$ -му входу. Целое  $n$  показывает требуемое число точек (шагов). DSTEP вычисляет матрицу  $Y$ , число столбцов которой равно размерности выхода  $y$ , а число строк равно  $n$ .

$[Y, X] = \text{dstep}(A, B, C, D, iu, n)$  также возвращает процесс изменения вектора состояния системы.

$Y = \text{dstep}(\text{NUM}, \text{DEN}, n)$  вычисляет переходный процесс по передаточной функции (С.5), где NUM и DEN содержат коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции, расположенные в порядке убывания степеней.

$[y, x] = \text{impulse}(a, b, c, d, iu, t)$

IMPULSE – функция веса (импульсная функция) непрерывной линейной системы.

$Y = \text{impulse}(A, B, C, D, iu, T)$  вычисляет функцию веса системы (С.1) по отношению к  $i$ -му входу. Вектор  $T$  должен содержать регулярную последовательность моментов времени, которая задает временную ось для функции веса. IMPULSE формирует матрицу  $Y$  содержащую столько столбцов, какова размерность вектора  $y$  и  $\text{LENGTH}(T)$  строк.

$[Y, X] = \text{impulse}(A, B, C, D, iu, T)$  также возвращает процесс изменения состояния системы.

$Y = \text{impulse}(\text{NUM}, \text{DEN}, T)$  вычисляет функцию веса по описанию системы в виде передаточной функции (С.2), где NUM и DEN содержат коэффициенты многочленов по убывающим степеням.

$$[\mathbf{L}, \mathbf{P}] = \text{lqe}(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

LQE – синтез линейного идентификатора состояния по квадратичному критерию.

Для непрерывной системы:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \quad - \text{уравнение состояния} ,$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \quad - \text{уравнение измерений}$$

с ковариационными матрицами возмущений и шумов измерения:

$$E\{w(t)\} = E\{v(t)\} = 0, E\{w(t)w^T(t)\} = QE\{v(t)v^T(t)\} = R$$

функция

$\text{lqe}(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$  возвращает матрицу коэффициентов передачи  $\mathbf{L}$  такую, что стационарный фильтр Калмана

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(z(t) - H\hat{x}(t) - Du(t))$$

вырабатывает линейную, оптимальную по квадратичному критерию оценку  $x(t)$ .

$[\mathbf{L}, \mathbf{P}] = \text{lqe}(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$  – возвращает матрицу коэффициентов передачи  $\mathbf{L}$  и решение алгебраического уравнения Риккати  $\mathbf{P}$ , которое является матрицей ковариаций ошибки оценивания.

$$[\mathbf{K}, \mathbf{S}] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N})$$

LQR – синтез линейного регулятора по квадратичному критерию для непрерывной системы.

$[\mathbf{K}, \mathbf{S}] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N})$  вычисляет оптимальную матрицу коэффициентов обратной связи  $\mathbf{K}$  такую, что закон управления  $u(t) = -Kx(t)$  минимизирует функцию потерь

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (\text{C.7})$$

при связи  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ .

Кроме того, возвращается матрица  $\mathbf{S}$  – решение присоединенного уравнения Риккати  $SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$

$[\mathbf{K}, \mathbf{S}] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N})$  включает перекрестную составляющую  $2x^T(t)Nu(t)$ , которая связывает  $u$  и  $x$  в целевой функции.

Программа осуществляет разложение по собственным векторам. Можно использовать аналогичную процедуру  $[K, S] = \text{lqr2}(A, B, Q, R, N)$ , использующую алгоритм Шура для решения алгебраического уравнения Риккати и численно более достоверна, чем LQR.

$$[K, S] = \text{lqry}(A, B, Q, R, N)$$

LQRY – синтез линейного регулятора квадратичному критерию с управлением по выходу и квадратичному критерию для непрерывных систем.

$[K, S] = \text{lqry}(A, B, C, D, Q, R)$  вычисляет оптимальную матрицу обратной связи  $K$  такую, что закон управления  $u(t) = -Ky(t)$  минимизирует целевую функцию

$$J = \int_0^{\infty} (y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (C.8)$$

при связи

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Кроме того, возвращается матрица  $S$  – решение присоединенного уравнения Риккати  $SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$

$[K, S] = \text{lqry}(A, B, Q, R, N)$  включает перекрестную составляющую  $2y^T(t)Nu(t)$ , которая связывает  $u$  и  $y$  в целевой функции.

$$[y, x] = \text{lsim}(a, b, c, d, u, t, x0)$$

LSIM – моделирование линейной системы непрерывного времени при произвольном входе.

$\text{lsim}(A, B, C, D, U, T)$  вычисляет и выводит реакцию системы (C.1) на входной процесс  $U$ . Матрица  $U$  должна иметь число столбцов, совпадающее с размерностью вектора входа  $u$ . Каждая строка  $U$  соответствует новому моменту времени, и  $U$  должна иметь  $\text{length}(T)$  строк.

$Y = \text{lsim}(A, B, C, D, U, T)$  вычисляет (без вывода) матрицу  $Y$ , число столбцов которой равно размерности выхода  $y$  и  $\text{length}(T)$  строк.

$[Y, X] = \text{lsim}(A, B, C, D, U, T)$  также возвращает процесс изменения состояния системы.

$\text{lsim}(A, B, C, D, U, T, X0)$  можно использовать, если заданы ненулевые начальные условия.

lsim(NUM, DEN, U, T) выводит реакцию системы по заданной передаточной функции (С.2), где NUM и DEN содержат коэффициенты многочленов по убывающим степеням.

**X = lyap(A, B, C)**

LYAP – решение уравнения Ляпунова.

X = lyap(A, C) находит решение матричного уравнения Ляпунова

$$AX + XA^T = -C.$$

X = lyap(A, B, C) находит решение обобщенного матричного уравнения Ляпунова  $AX + XB = -C$ .

См. также DLYAP.

**[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(mag, phase, w)**

MARGIN – вычисление запасов устойчивости по усилению и по фазе и соответствующих частот пересечения.

[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(MAG, PHASE, W) вычисляет запас устойчивости по усилению Gm, по фазе Pm и соответствующие частоты Wcg и Wcp по заданным векторам АЧХ (диаграмме Бode), ФЧХ и частоты MAG, PHASE, W для рассматриваемой системы. Производится интерполяция между значениями по частоте для определения точных значений.

**[Am, Bm, Cm, Dm] = minreal(A, B, C, D, TOL)**

MINREAL – минимальная реализация и сокращение нулей и полюсов.

[Am, Bm, Cm, Dm] = minreal(A, B, C, D) возвращает минимальную реализацию по уравнениям состояния системы (A, B, C, D). Выводится сообщение о количестве исключенных компонент вектора состояния.

[Am, Bm, Cm, Dm] = minreal(A, B, C, D, TOL) использует точность TOL при определении переменных состояния, которые исключаются.

[Zm, Pm] = minreal(Z, P), где Z и P – вектор-столбцы, содержащие нули и полюса, исключает общие корни, принадлежащие полю точностью  $TOL = 10 * \text{SQRT}(\text{EPS}) * \text{ABS}(Z(i))$ .

[Zm, Pm] = minreal(Z, P, TOL) использует точность TOL.

Для передаточных функций

[NUMm, DENm] = minreal(NUM, DEN), где NUM, DEN – вектор-строки коэффициентов многочленов числителя и знаменателя, MINREAL исключает общие корни.

$[NUMm, DENm] = \text{minreal}(NUM, DEN, TOL)$  использует точность TOL.

**Ob = obsv(A, C)**

OBSV – формирование матрицы наблюдаемости.

obsv(A, C) возвращает матрицу наблюдаемости

$$Ob = [C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}]^T.$$

**[Abar, Bbar, Cbar, T, K] = obsvf(A, B, C, TOL)**

OBSVF – треугольная форма наблюдаемости.

[Abar, Bbar, Cbar, T, K] = obsvf(A, B, C) возвращает разбиение на подпространства наблюдаемых и ненаблюдаемых состояний.

[Abar, Bbar, Cbar, T, K] = obsvf(A, B, C, TOL) использует точность TOL.

Если матрица управляемости пары  $(A, C)$  имеет ранг  $r \leq n$ , то имеется преобразование подобия T такое, что  $Abar = TAT', Bbar = TB, Cbar = CT'$  ( $T' = T^{-1}$ ) и преобразованная система имеет вид

$$Abar = \begin{bmatrix} Ano & A_{12} \\ 0 & Ao \end{bmatrix}, \quad Bbar = \begin{bmatrix} Bno \\ Bo \end{bmatrix}, \quad Cbar = [0 \quad Co],$$

где пара  $(Ao, Co)$  наблюдаемая и  $Co(sI - Ao)^{-1}Bo \equiv \equiv C(sI - A)^{-1}B$ .

**K = place(A, B, P)**

PLACE – вычисление матрицы обратной связи по состоянию (решение задачи модального управления).

$K = \text{place}(A, B, P)$  вычисляет постоянную матрицу обратной связи K такую, что собственные числа матрицы A-BK определяются заданным вектором P. Комплексные собственные числа в векторе P должны представляться комплексно-сопряженными парами. Никакое собственное число не должно иметь кратность, превосходящую число управляющих воздействий.

Выводимое значение "ndigits" (n знаков) является оценкой того, насколько удачно распределены собственные значения. Оно служит оценкой того, сколько десятичных разрядов собственных чисел A-BK удовлетворяют заданным в массиве P значениям.

Предупреждающее сообщение появляется, если ненулевые полюса замкнутой системы на 10% превышают заданные в P значения.

**[num, den] = ss2tf(a, b, c, d, iu)**

SS2TF – преобразование уравнений состояния в передаточную функцию.

[NUM, DEN] = ss2tf(A, B, C, D, iu) вычисляет передаточную функцию (C.2) или (C.5) системы (C.1), (C.6) от *i*-го входа. Вектор DEN содержит коэффициенты знаменателя в порядке убывания степени *s*. Коэффициенты числителя содержатся в матрице NUM, имеющей столько строк, какова размерность выхода *y*.

**[y, x] = step(a, b, c, d, iu, t)**

STEP – переходная функция линейной непрерывной системы.

Y = step(A, B, C, D, iu, T) вычисляет переходную функцию системы (C.1) на входное ступенчатое воздействие к *i*-му входу. Вектор T должен иметь регулярные значения по временной оси. STEP вычисляет матрицу Y, имеющую столько столбцов, какова размерность выходного вектора *y* и length(T) строк.

[Y, X] = step(A, B, C, D, iu, T) также возвращает процесс изменения состояния системы.

Y = step(NUM, DEN, T) вычисляет переходный процесс по описанию системы передаточной функцией (C.2), где NUM и DEN содержат коэффициенты многочленов по убывающим степеням.

**[a, b, c, d] = tf2ss(num, den)**

TF2SS – преобразование передаточной функции к уравнениям состояния.

[A, B, C, D] = tf2ss(NUM, DEN) вычисляет уравнения состояния (C.1) или (C.6) по передаточной функции (C.2), (C.5) для системы с одним (скалярным) входом. Вектор DEN должен содержать коэффициенты знаменателя в порядке убывания степени *s*. Коэффициенты числителя должны содержаться в матрице NUM, имеющей столько строк, какова размерность выхода *y*. Уравнения состояния получаются в управляемой канонической форме. Для дискретных систем матрица числителя должна быть дополнена нулевыми элементами до совпадения степеней числителя и знаменателя.

## Примеры подпрограмм преобразования моделей

Программа **ss2df** преобразования уравнений состояния к вещественной диагональной форме

```
function [Ad,Bd,Cd,T]=ss2df(A,B,C)
[n,m]=size(A)
[v,p]=eig(A)
k=1;
P=[ ];
while k<=n,
if all(imag(v(:,k))==0)
P=[P v(:,k)];
k=k+1;
else
P=[P, 1/2*(v(:,k)+v(:,k+1)),...
1/2/j*(v(:,k)-v(:,k+1))];
k=k+2;
end
end
T=inv(P);
Ad=T*A*P;
Bd=T*B;
Cd=C*P;
```

Программа **tf2cf** приведения передаточной функции к УКП для СИМО-систем

```
function [A,B,C,D]=tf2cf(num,den)
n=length(den)-1;
[l,r]=size(num);
if (r>n+1) — (den(1)==0)
error('Степень знаменателя должна быть не ниже степени числителя.')
```

```
end
dn=den/den(1);
nm=[zeros(l,n-r+1),num/den(1)];
A=[zeros(n-1,1) eye(n-1,n-1); -dn(n+1:-1:2)];
B=[zeros(n-1,1); 1];
C=nm(:,r:-1:2)-nm(:,1)*dn(r:-1:2);
D(:,1)=nm(:,1);
```

Программа **tf2of** приведения передаточной функции к НКП  
для MISO-систем

```
function [A,B,C,D]=tf2of(num,den)
n=length(den)-1;
[m,r]=size(num);
if (r>n+1) — (den(1)==0)
error('Степень знаменателя должна быть не ниже сте-
пени числителя.')
end
dn=den/den(1);
nm=[zeros(m,n-r+1),num/den(1)];
A=[zeros(n-1,1) eye(n-1,n-1); -dn(n+1:-1:2)];
C=[1, zeros(1,n-1)];
D(1,:)=nm(:,1)';
nm=nm-nm(:,1)*dn;
B(1,:)=nm(:,2)';
for k=2:n
sm=0;
for l=1:k-1
sm=sm+B(l,:)*dn(k-l+1);
end
B(k,:)=nm(:,k+1)'-sm;
end
```

## D. Приложение D. ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ SCILAB

В конце 1990-х годов всем, интересующимся вычислительными аспектами и автоматизированным проектированием систем управления стал доступен пакет Scilab, аналогичный по своим возможностям пакету MATLAB, но имеющий перед ним одно бесспорное преимущество: Scilab распространяется абсолютно свободно, т.е. бесплатно. Система Scilab разработана специалистами из французского научно-исследовательского института по информатике и автоматике (INRIA) и может быть скопирована (вместе с документацией) из сети Интернет:

<http://www-rocq.inria.fr/scilab/>

Ниже приводятся основные сведения о системе и демонстрационные примеры конструкций языка и возможностей системы Scilab. Более подробно о работе в среде Scilab можно узнать из готовящейся к печати книги: Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков "Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB и Scilab" [10].

Scilab состоит из трех отдельных частей: интерпретатора, библиотек функций (процедур Scilab) и библиотек подпрограмм на языках Фортран и С. Подпрограммы на Фортране и С, строго говоря, не входят в Scilab – они вызываются интерпретатором. Большая их часть доступна независимо, например, из сетевой базы данных Netlib: <http://www.netlib.org/> Некоторые подпрограммы слегка модифицированы для лучшей совместимости с интерпретатором Scilab. Основным достоинством Scilab, как и системы MATLAB, является возможность легко оперировать с числовыми матрицами: такие операции как сложение, умножение, транспонирование, слияние, вырезание, выполняются непосредственно. Scilab также дает возможность манипулирования с более сложными объектами (такими, как полиномы, полиномиальные или рациональные матрицы передаточных функций) при помощи обработки списков и типизированных списков. Это в свою очередь открывает пути естественного символического представления таких объектов, как линейные системы и графы. При этом синтаксис операций идентичен используемому при работе с постоянными векторами и матрицами и очень похож на син-

таксис языка MATLAB.

Scilab предоставляет широкий спектр процедур анализа нелинейных систем: решение уравнений, численное интегрирование явных или неявных систем, методы оптимизации (в том числе недифференцируемой). В состав системы Scilab входят сотни математических функций, встроенные библиотеки по линейной алгебре (включая работу с разреженными матрицами, кронекеровским и шуровским представлением); по системам управления (классическая, линейно-квадратичная и  $H^\infty$ -оптимизация, редукция моделей, идентификация и др.); пакет программ по линейным матричным неравенствам (LMI), по обработке сигналов и фильтрации, пакет анализа и оптимизации сетей Metanet.

Прилагаемый к пакету Scilab тулбокс Scicos предоставляет средства графического описания и моделирования взаимосвязанных дискретных и непрерывных систем (аналогично системе SIMULINK).

Имеются развитые графические возможности (двумерная и трехмерная графика, анимация). Возможности символических вычислений реализуются через интерфейс с Maple. Наконец, имеется система параллельных вычислений Parallel Scilab.

Общая философия Scilab состоит в создании вычислительной среды, предоставляющей пользователю:

- гибкий набор типов данных с естественным и простым синтаксисом (например, поддерживается тип данных "строка символов", а функции считаются объектами и могут определяться в системе Scilab и передаваться как входные или выходные аргументы других функций);
- достаточный набор вычислительных процедур как основу для выполнения разнообразных вычислений;
- открытую среду программирования, в которую легко добавляются новые примитивы;
- поддержку разработки новых библиотек и тулбоксов, в частности, добавления новых модулей на Фортране и С.

Приведем некоторые примеры конструкций и текстов на Scilab.

#### Основные конструкции языка

*Скалярные объекты.*

**a=1** – вещественная константа

**1==1** – логическое выражение  
**'string'** – строка символов  
**z=poly(0,'z')** – многочлен от  $z$ , имеющий один нулевой корень  
**p=1+3\*z+4.5\*z^2** – многочлен от  $z$

$$p = 1 + 3z + 4.5z^2$$

**r=z/p** – рациональная функция

$$r = \frac{z}{1 + 3z + 4.5z^2}$$

*Матрицы*

**A=[a+1 2 3; 0 0 atan(1); 5 9 -1];** – 3×3-матрица вещественных констант

**b=[%t,%f]** – 1×2-матрица логических констант

**Mc=['this','is'; 'a','matrix']** – 2×2-матрица строк

**Mp=[p,1-z; 1,z\*p]** – 2×2-матрица многочленов

$$Mp = \begin{bmatrix} 1 + 3z + 4.5z^2 & 1 - z \\ 1 & z + 3z^2 + 4.5z^3 \end{bmatrix}$$

**F=Mp/poly([1+%i 1-%i 1],'z')** – матрица рациональных функций

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1 + 3z + 4.5z^2}{-2 + 4z - 3z^2 + z^3} & \frac{-1}{2 - 2z + z^2} \\ \frac{1}{-2 + 4z - 3z^2 + z^3} & \frac{z + 3z^2 + 4.5z^3}{-2 + 4z - 3z^2 + z^3} \end{bmatrix}$$

**Sp=sparse([1,2;4,5;3,10],[1,2,3])** – разреженная матрица

$$Sp = \begin{bmatrix} (4, 10) \text{ sparse matrix} \\ (1, 2) 1. \\ (3, 10) 3. \\ (4, 5) 2. \end{bmatrix}$$

**Sp(1,10)=Sp(1,1)** – логическая разреженная матрица

*Списки*

**L=list(a,-(1:5), Mp,['this','is','a','list'])** – список

```
L =
L(1)
1.
L(2)
! - 1. - 2. - 3. - 4. - 5. !
L(3)
! 1 + 3z + 4.5z^2          1 - z          !
!           1           z + 3z^2 + 4.5z^3    !
L(4)
! this is !
! a list  !
```

**Lt=tlst(['mylist','color','position','weight'],'blue',[0,1],10)**

– типизированный список

**Lt('color')**

– извлечение из списка

**A=diag([2,3,4]); B=[1 0;0 1;0 0];**

**C=[1 -1 0];D=0\*C\*B;x0=[0;0;0];**

**Sl=syslin('c',A,B,C,D,x0)** – стандартное представление системы уравнениями состояния

```
Sl =
Sl(1) (state-space system:)
lss
! 2.  0.  0.  !
Sl(2) = A matrix = ! 0.  3.  0.  !
! 0.  0.  4.  !
```

```

Sl(3) = B matrix =
! 1.  0.  !
! 0.  1.  !
! 0.  0.  !
Sl(4) = C matrix =
! 1.  -1.  0.  !
Sl(5) = D matrix =
! 0.  0.  !
Sl(6) = X0 (initial state) =
! 0.  !
! 0.  !
! 0.  !
Sl(7) = Time domain =
с

```

**Sl("A"), Sl("C")** – выбранные элементы типизированного списка

**Slt=ss2tf(Sl)** – матричная передаточная функция

```

Slt =
!      1      -1
!  -----  -----  !
!  -2 + s    -3 + s

```

**Slt('num'), Slt('den')**

*Операторы*

**v=1:5; W=v'\*v** – умножение матрицы-константы

**W(1,:)** – извлечение первого столбца

**W(:,5)** – извлечение последней строки

**Mp'\*Mp+eye** – матрица многочленов

```

ans =
column 1
! 3 + 6z + 18z^2 + 27z^3 + 20.25z^4  !
!      1 + 3z + 4.5z^2              !
column 2
!      2                                !
!      1 + 3z + 4.5z                 !
! 2 - 2z + 2z^2 + 6z^3 + 18z^4 + 27z^5 + 20.25z^6  !

```

**Mp1=Mp(1,1)+4.5\*%i** – комплексная матрица

**Fi=C\*(z\*eye-A)^(-1)\*B;** – вычисление передаточной функции

**F(:,1)\*Fi** – действия с рациональными функциями

$$\text{ans} = \frac{1 + 3z + 4.5z^2}{4 - 10z + 10z^2 - 5z^3 + z^4} \frac{1 + 3z + 4.5z^2}{6 - 14z + 13z^2 - 6z^3 + z^4}$$

**M=[Mp -Mp; Mp' Mp+eye]; [Fi, Fi(:,1)]** – сцепление  
многочленных матриц и рациональных функций

**F=syslin('c',F); Num=F('num');Den=F('den');** –  
действия с передаточными функциями

*Некоторые числовые операции.*

**inv(A) inv(Mp)** – обращение

**inv(S1\*S1')** – произведение двух линейных систем и обра-  
щение

**w=ss2tf(ans)** – получение передаточной функции

$$w = \frac{18 - 30s + 18.5s^2 - 5s^3 + 0.5s^4}{6.5 - 5s + s^2}$$

**w1=inv(ss2tf(S1)\*ss2tf(S1'))** – произведение двух переда-  
точных функций и обращение

**A=rand(3,3);B=rand(3,1);n=contr(A,B)** – проверка  
управляемости

**K=ppol(A,B,[-1-%i -1+%i -1]);**

**poly(A-B\*K,'z')-poly([-1-%i -1+%i -1],'z')** – синтез мо-  
дального регулятора по состоянию и проверка результата

$$K = -113.28616 \quad 111.62667 \quad 33.092441$$

**s=sin(0:0.1:5\*pi);**

**ss=fft(s(1:128),-1);**

– быстрое преобразование Фурье

**xbasc(); plot2d3('enn',1,abs(ss));**

– вывод графика

*Определение функции в режиме интерпретации*

**deff('[x]=fact(n)'),'if n=0 then x=1,**

**else x=n\*fact(n-1),end')**

**10+fact(5)**

*Оптимизация*

**deff('[f,g,ind]=rosenbro(x,ind)'),'a=x(2)-x(1)^2, b=1-x(2),**

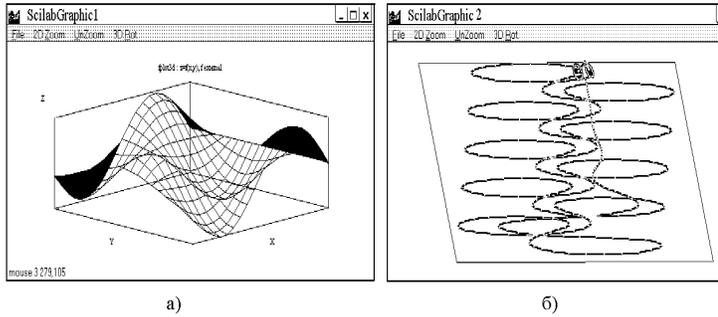


Рис. D.1. Примеры графических изображений пакета Scilab.  
 а – трехмерный график, б – моделирование велосипеда.

```
f=100.*a^2 + b^2 , g(1)=-400.*x(1)*a , g(2)=200.*a -
2.*b ');
```

```
[f,x,g]=optim(rosenbro,[2;2], 'qn')
```

*Моделирование*

```
a=rand(3,3); e=expm(a);
deff('ydot=f(t,y)', 'ydot=a*y');
e(:,1)-ode([1;0;0],0,1,f)
```

*Описание систем*

```
s=poly(0,'s');
h=[1/s,1/(s+1);1/s/(s+1),1/(s+2)/(s+2)]
w=tf2ss(h); ss2tf(w)
h1=clean(ans)
```

h1 =	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+s}$	!
!	$\frac{1}{s+s^2}$	$\frac{1}{4+4s+s^2}$	!

*Пример: исследование системы второго порядка*

```
sl=syslin('c',1/(s*s+0.2*s+1))
instants=0:0.05:20;
```

– переходная функция:

```
y=csim('step',instants,sl);
```

```
xbasc();plot2d(instants,'y')
```

– переходная функция с задержкой:

```

deff('[in]=u(t)','if t;3 then
in=0;else in=1;end');
y1=csim(u,instant,s1);
plot2d(instant,y1');
- функция веса:
yi=csim('imp',instant,s1);
xbasc();plot2d(instant,yi');
yi1=csim('step',instant,s*s1);
plot2d(instant,yi1');
- дискретизация
dt=0.05; sld=dscr(tf2ss(s1),0.05);
- переходная функция дискретной модели:
u=ones(instant);
yuy=flts(u,sld);
xbasc();plot(instant,yuy)
- функция веса дискретной модели:
u=0*ones(instant);u(1)=1/dt;
yuy=flts(u,sld);
xbasc();plot(instant,yuy)
- объединение систем
w1=[w,w];
clean(ss2tf(w1))
w2=[w;w];
clean(ss2tf(w2))
- замена переменной
z=poly(0,'z'); horner(h,(1-z)/(1+z))
- дробно-линейное ("билинейное") преобразование

```

$\text{ans} = \begin{array}{ccc} \frac{1+z}{1-z} & \frac{1+z}{2} & ! \\ \frac{1+2z+z^2}{2-2z} & \frac{1+2z+z^2}{9+6z+z^2} & ! \end{array}$
--

## Е. ЛИТЕРАТУРА

- 1.!!!! *Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем* / П.Д. Крутько, А.И. Максимов, Л.М. Скворцов: Под ред. П.Д. Крутько. М.: Радио и Связь, 1988. 306 с.
- 2.!!!! *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы: Учебное пособие. М.: Высш. шк., 1989. 263 с.
- 3.!!!! *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
- 4.!!!! *Андриевский Б.Р.* Анализ систем в пространстве состояний. СПб.: ИПМаш РАН, 1997. 206 с.
- 5.!!!! *Андриевский Б.Р.* Упрощенный метод синтеза идентификатора состояния // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: НС по Кибернетике, 1977. С. 50–53.
- 6.!!!! *Андриевский Б.Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л.* Управление колебаниями механических систем методом скоростного градиента // Автоматика и телемеханика. 1996. № 4. С. 4–17.
- 7.!!!! *Андриевский Б.Р., Деревицкий Д.П., Уткин В.Н., Фрадков А.Л.* Проектирование адаптивных систем управления с БЦВК: Учебное пособие. Л.: ЛМИ, 1981. 98 с.
- 8.!!!! *Андриевский Б. Р., Козлов Ю.М.* Методы управления в условиях неопределенности: Учебное пособие. Л.: ЛМИ, 1989. 88 с.
- 9.!!!! *Андриевский Б. Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л.* Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации. Обзор // Автоматика и телемеханика. 1988. № 12. С. 3–39.
- 10.!!!! *Андриевский Б. Р., Фрадков А.Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB-5 и Scilab. В печати.
- 11.!!!! *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959.

- 12.!!!! *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 240 с.
- 13.!!!! *Бавалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987, 599 с.
- 14.!!!! *Барабанов Н.Е., Гелиг А.Х., Леонов Г.А. и др.* Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления// Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 3–40.
- 15.!!!! *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768 с.
- 16.!!!! *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- 17.!!!! *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
- 18.!!!! *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958.
- 19.!!!! *Боднер В.А.* Системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1973. 697 с.
- 20.!!!! *Бортовые терминальные системы управления: Принципы построения и элементы теории /Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов.* М.: Машиностроение, 1983. 200 с.
- 21.!!!! *Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В.* Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 215 с.
- 22.!!!! *Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г.* Автоматизированный электропривод с упругими связями. СПб.: Энергоатомиздат, 1992.
- 23.!!!! *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.
- 24.!!!! *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.:Наука, 1988.

- 25.!!!! *Бычков Ю.А.* Аналитически-численный расчет динамики нелинейных систем СПб. СПбГЭТИ, 1997. 386 с.
- 26.!!!! *Верешкин А.Е. , Катковник В.Я.* Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. М. Сов. радио, 1973. 151 с.
- 27.!!!! *Вибрации в технике.* Справочник. В 6-ти томах /Ред.совет: В.Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978–1980.
- 28.!!!! *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.:Наука, 1991.
- 29.!!!! *Воротников В.И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследования, результаты, особенности //Автоматика и телемеханика. 1993. № 3, С.3–62.
- 30.!!!! *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
- 31.!!!! *Гузенко П.Ю.* Дискретное управление непрерывными хаотическими системами //Анализ и управление нелинейными колебательными системами /Под ред. Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 1998. С. 53–84.
- 32.!!!! *Гультяев А.К.* MATLAB 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows: Практическое пособие. СПб.: КОРОНА принт, 1999. 288 с.
- 33.!!!! *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. Красноярск, 1995.
- 34.!!!! *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1998.
- 35.!!!! *Динамика машин и управление машинами.* Справочник /Под ред. Г.В. Крейнина. М.: Машиностроение, 1988.
- 36.!!!! *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981. 216 с.

- 37.!!!! *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи //Зарубежная радиоэлектроника. № 10. 1997. С. 4–26.
- 38.!!!! *Догановский С. А.* Параметрические системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1974.
- 39.!!!! *Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу //Автоматика и телемеханика. 1996, № 2 С. 3–33.
- 40.!!!! *Емельянов С.В.* Системы автоматического регулирования с переменной структурой. М.: Наука, 1967. 336 с.
- 41.!!!! *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Синтез алгоритмов изменения перестраиваемых коэффициентов в самонастраивающихся системах с эталонной моделью //Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 1. С. 47–49.
- 42.!!!! *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Условия функционирования многомерной самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью при постоянно действующих параметрических возмущениях. //Докл. АН СССР. 1978. т. 241, № 2. С. 301–304.
- 43.!!!! *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Функциональная управляемость и настраиваемость систем координатно-параметрического управления //Автоматика и телемеханика. 1986. № 2, с. 21–30.
- 44.!!!! *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970. 704 с.
- 45.!!!! *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979.
- 46.!!!! *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- 47.!!!! *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1986. 650 с.
- 48.!!!! *Ковалева А.С.* Оптимальное управление колебаниями виброударных систем. М.: Наука, 1990.

- 49.!!!! *Колесников А.А.* Синергетическая теория управления. М. Энергоатомиздат, 1994. 344с.
- 50.!!!! *Красносельский А.М.* О возникновении колебаний с большой амплитудой в системах с насыщением // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 844–848.
- 51.!!!! *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления. М.: Наука, 1977. 272 с.
- 52.!!!! *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997. 496 с.
- 53.!!!! *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
- 54.!!!! *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
- 55.!!!! *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
- 56.!!!! *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000.
- 57.!!!! *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1978.
- 58.!!!! *Луковников В.И.* Электропривод колебательного движения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152с.
- 59.!!!! *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
- 60.!!!! *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
- 61.!!!! *Макки Дж., Гласс Л.* От часов – к хаосу: ритмы жизни. М.: Мир, 1990.
- 62.!!!! *Меццерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие /Под. ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина. М.: Наука, 1986.

- 63.!!!! *Мирошник И.В.* Согласованное управление многоканальными системами. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 128с.
- 64.!!!! *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- 65.!!!! *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
- 66.!!!! *Математические основы теории автоматического регулирования: Учебное пособие /Под ред. Б.К. Чемоданова.* М.: Высшая школа, 1977. Т. 1. 366 с.; т. 2. 455 с.
- 67.!!!! *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Н.Новгород. Ч. 1. 1994; ч. 2. 1996.
- 68.!!!! *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987, 424 с.
- 69.!!!! *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор //Автоматика и телемеханика. 1994. № 9. С. 3–26.
- 70.!!!! *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
- 71.!!!! *Основы автоматического регулирования.* Тома 1, 2/ Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машгиз, 1954.
- 72.!!!! *Основы математического моделирования: Учебное пособие.* 2-е изд. /Под ред. А.Л. Фрадкова. БГТУ. СПб.: 1996. 192 с.
- 73.!!!! *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 321 с.
- 74.!!!! *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д.* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. – М.: Машиностроение, 1972. 260 с.
- 75.!!!! *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980.

- 76.!!!! *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. М.: Наука, 1986. 615 с.
- 77.!!!! *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 410 с.
- 78.!!!! *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.:Наука, 1983.
- 79.!!!! *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974, 332 с.
- 80.!!!! *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М. Наука, 1981. 176 с.
- 81.!!!! *Потемкин В.Г.* Система MATLAB. Справочное пособие. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1997 – 350 с.
- 82.!!!! *Потемкин* *В.Г.*  
MATLAB 5 для студентов. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1998. 314 с.
- 83.!!!! *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем М.: Наука, 1970.
- 84.!!!! *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Машиностроение, 1979.
- 85.!!!! *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- 86.!!!! *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
- 87.!!!! *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 1997. 320 с.
- 88.!!!! *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 638 с.
- 89.!!!! *Розенвассер Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. М.: Физматлит, 1994. 464 с.

- 90.!!!! *Руи Н., Абетс П., Лалуа Н.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300с.
- 91.!!!! *Северов Л.А.* Механика гироскопических систем. М.: МАИ, 1996. 212 с.
- 92.!!!! *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
- 93.!!!! *Справочник по теории автоматического управления /Под ред. А.А. Красовского.* М.: Физматлит, 1987. 712 с.
- 94.!!!! *Сю Д., Мейер А.* Современная теория управления и ее приложения. М.: Машиностроение, 1972. 544 с.
- 95.!!!! *Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. В 2-х частях /Под ред. А.А. Воронова.* 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986.
- 96.!!!! *Тимофеев А.В.* Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980. 88с.
- 97.!!!! *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. 2-е изд. М.: Наука, 1998. 232 с.
- 98.!!!! *Топчиев Ю.Н., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г.* Системы стабилизации. М.: Машиностроение, 1974.
- 99.!!!! ТИИЭР, 1987. т.75, № 8. Хаотические системы (специальный выпуск).
- 100.!!!! *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
- 101.!!!! *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
- 102.!!!! *Уткин В.И.* Оптимизация и управление в системах со скользящими режимами. М.: Наука, 1981.
- 103.!!!! *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981, 448 с.

- 104.!!!! *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта //Автоматика и телемеханика. 1974. № 12. С. 96–103.
- 105.!!!! *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применения в задачах адаптивного управления //Автоматика и телемеханика. 1979. № 9. С. 90–101.
- 106.!!!! *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. 292 с.
- 107.!!!! *Фрадков А.Л.* Адаптивная стабилизация минимально-фазовых объектов с векторным входом без измерения производных от выхода //Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 592–594.
- 108.!!!! *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление нелинейными колебаниями //Алгоритмическое обеспечение процессов управления в механике и машиностроении. Тезисы докл. М., 1994. С. 29–30. (Всерос. научн. конф).
- 109.!!!! *Фрадков А.Л.* Исследование физических систем при помощи обратных связей //Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 213–230.
- 110.!!!! *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.–192 с.
- 111.!!!! *Черноузько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
- 112.!!!! *Шалфеев В.Д., Осипов Г.В., Козлов А.К., Волковский А.Р.* Хаотические колебания – генерация, синхронизация, управление //Зарубежная радиоэлектроника. № 10. 1997. С. 27–49.
- 113.!!!! *Шаров С.Н.* Приближенные методы анализа нелинейных систем автоматического управления: Учебное пособие. СПб.: БГТУ. 1993. 161 с.
- 114.!!!! *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Радио и связь, 1978.

- 115.!!!! *Шулов Г. Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969. 432 с.
- 116.!!!! *Шульце К.-П., Реберг К.-Ю.* Инженерный анализ адаптивных систем. М.: Мир, 1992. 280 с.
- 117.!!!! *Araki M., Yamamoto K.* Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics and nyquist criterion //IEEE Trans. AC. 1986. Vol. 31, № 2, Feb. P. 145–154.
- 118.!!!! *Andrievsky B.R.* Simulation-based method for computation of the transfer functions of multi-frequency digital systems //Proc. 3rd Intern. Conf. MMAR-94, 1994, Poland.
- 119.!!!! *Andrievsky B.R., Churilov A.N., Fradkov A.L.* Feedback Kalman-Yakubovich lemma and its applications to adaptive control. //Proc. 35th IEEE Conf. of Decision and Control (CDC'96). Kobe, Japan, P. 4537–4542.
- 120.!!!! *Andrievsky B.R., Fradkov A.L.* Implicit model reference adaptive controllers based on feedback Kalman-Yakubovich lemma //Proc. 3rd IEEE Conf. on Control Applications. Glasgow, 1994. P. 1171–1174.
- 121.!!!! *Andrievsky, B.R., Fradkov A.L., Kaufman H.* Necessary and sufficient condition for almost strict positive realness and their application to direct implicit adaptive control systems //Proc. of Amer. Contr. Conf. Baltimore, 1994. P. 1265–1266.
- 122.!!!! *Andrievsky B.R., Fradkov A.L., Stotsky A.A.* Shunt compensation for indirect sliding-mode adaptive control. //Proc. of 13th Triennial World Congress IFAC. San Francisco, USA. 1996, P. 193–198.
- 123.!!!! *Bar-Kana I.* Parallel feedforward and simplified adaptive control// Int. Journ. of Adapt. Contr. and Sign. Processing. 1987. Vol. 1. P. 95–109.
- 124.!!!! *Bartolini G., Ferrara A.* A simplified discontinuous control scheme for uncertain linear systems: an Input/Output approach. //Proc. of the IEEE Workshop "Variable Structure and Lyapunov Control of Uncertain Dynamical Systems", Sheffield, UK. 1992. P. 6–11.

- 125.!!!! *Bartolini G., Ferrara A., Stotsky A.* Stability and exponential stability of an adaptive control scheme for plants of any relative degree //IEEE Trans. Autom. Contr. 1995. Vol. 40. № 1, P. 100–103.
- 126.!!!! *Beards C.F.* Vibrations and control systems. Ellis Horwood ltd., Halsted Press, NY: Chichester, Toronto, 268 P.
- 127.!!!! *Bellman R.E., Bentsman J., Meerkov S.M.* Vibrational control of nonlinear systems: Vibrational stabilizability //IEEE Trans. AC. Vol. 31. 1986. № 8. P. 710–724.
- 128.!!!! *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H., Pogromsky A.Yu.* On self-synchronization and controlled synchronization. // System and Control Letters. Vol.31. 1997. P. 299–305.
- 129.!!!! *Bliman P.-A., Krasnosel'skiĭ A.M., Sorine M., Vladimirov A.A.* Nonlinear resonance in systems with hysteresis // Nonlinear Analysis: Theory & Applications. 1996. V. 27, № 5. P. 561–577.
- 130.!!!! *Bondarko V.A., Yakubovich V.A.* The Method of recursive aim inequalities in adaptive control theory //Int.J. Adaptive Control and Signal Processing. 1992. Vol.6(3). P. 141–160.
- 131.!!!! *Brandt M., Chen G.* Feedback control of pathological rhythms in two models of cardiac activity. //Proc. 1st International Conference "Control of Oscillations and Chaos" (COC'97). St.Petersburg, 1997. Vol.2. P. 219–223.
- 132.!!!! *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. IEEE Trans. AC. Vol.36. 1991. № 11, P. 1228–1240.
- 133.!!!! *Chaos and non-linear models in economics. Theory and applications* /Eds. J. Greedy, V.L. Martin. Melbourne: Edward Elgar, 1994.
- 134.!!!! *Carroll R.L., Lindorff D.* An adaptive observer and identifier for a linear system //IEEE Trans. AC, Vol. 18. 1973. P. 428–435.

- 135.!!!! *Chen G., Dong X.* From chaos to order: Perspectives, Methodologies and Applications. Singapore: World Scientific, 1998. 753 P.
- 136.!!!! *Cuomo K., Oppenheim A., Strogatz S.* Robustness and signal recovery in a synchronized chaotic system. //Int.J. of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3. P. 1629–1638.
- 137.!!!! *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (2nd edition) Redwood city: Addison-Wesley. 1989.
- 138.!!!! *Dressler U., Nitsche G.* Controlling chaos using time-delay coordinates //Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68(1). P. 1–4.
- 139.!!!! *Etter D.M.* Engineering Problem Solving with MATLAB<sup>R</sup>. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993. 434 P.
- 140.!!!! *Feuer A., Morse A.S.* Adaptive control of SISO linear systems. *IEEE Trans. AC.* 1978, Vol. 23. № 4. P. 557–569.
- 141.!!!! *Fradkov A.L.* Continuous-time model reference adaptive systems – an East-West review. //Proc ACASP'92, Grenoble, 1–3 July, 1992. P. 1882–1885.
- 142.!!!! *Fradkov A.L.* Nonlinear adaptive control: regulation - tracking - oscillations. //Proc. 1st IFAC Workshop "New Trends in the Design of Control Systems". Smolenice, 1994. P. 426–431.
- 143.!!!! *Fradkov A.L.* Adaptive synchronization of hyper-minimum-phase systems with nonlinearities //Proc. 3rd IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation, Limassol, July 1995, Vol.1. P. 272–277.
- 144.!!!! *Fradkov A.L.* Speed-gradient laws of control and evolution //Proc. 1st European Control Conference (ECC). Grenoble, July 2–5, 1991. P. 1861–1865.
- 145.!!!! *Fradkov A.L.* Swinging control of nonlinear oscillations. //Intern. J. Control. 1996. Vol.64. № 6. P. 1189–1202.
- 146.!!!! *Fradkov A.L.* Feedback resonance in nonlinear oscillators //Proc. 5th European Contr. Conf. Karlsruhe, Aug.31–Sep.3, 1999.

- 147.!!!! *Fradkov A.L., Makarov I.A., Shiriaev A.S., Tomchina O.P.* Control of oscillations in Hamiltonian systems. //Proc. 4th European Contr. Conf. (ECC'97), Brussels, 1997.
- 148.!!!! *Fradkov A.L., Guzenko P.Yu.* Adaptive control of oscillatory and chaotic systems based on linearization of Poincaré map //Proc. 4th European Contr. Conf. (ECC'97), Brussels, 1997.
- 149.!!!! *Fradkov A.L., Guzenko P.Yu., Kukushkin S.A., Osipov V.A.* Dynamics and control of thin film growth from multicomponent gas. *J. of Physics D: Applied Physics.* 1997. Vol. **30**(20). P. 2794–2797.
- 150.!!!! *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999. 510 P.
- 151.!!!! *Fradkov A.L., Nijmeier H., Markov A. Yu.* On adaptive observer-based synchronization for communication //Prepr. of 14th IFAC World Congress, Beijing, 5–9 July 1999, Vol. D. P. 461–466.
- 152.!!!! *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Speed gradient control of chaotic continuous-time systems //IEEE Transactions on Circuits and Systems, part I. . 1996 Vol.43. № 11 P. 907–913..
- 153.!!!! *A.L. Fradkov, A.Yu. Pogromsky.* Introduction to control of oscillations and chaos. Singapore: World Scientific, 1998.
- 154.!!!! Garfinkel A., Spano M., Ditto W., Weiss J. Controlling cardiac chaos //Science. 1992. Vol.257. P. 1230–1235.
- 155.!!!! *Hansen C.H., Snyder S.D.* Active control of sound and vibration. Chapman and Hall, 1997. 1260 P.
- 156.!!!! *Hasler M.* Synchronization of chaotic systems and transmission of information. //Int.J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8. № 4. P. 647–660.
- 157.!!!! *Householder A.S.* The theory of matrices in numerical analysis. NY: Blaisdell. 1964.

- 158.!!!! *Shiriaev A.S., A.L. Fradkov* Stabilization of invariant manifold for nonaffine nonlinear systems //IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design. Enschede. Netherlands, 1998. P. 215–220.
- 159.!!!! *IEEE* Transactions on Circuits and Systems. Special Issue on Chaos in Electronic Circuits. 1993. Vol.40. № 10.
- 160.!!!! *Isidori A.*, Nonlinear control systems. Berlin: Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- 161.!!!! *Iwai Z., Mizumoto I.* Realization of simple adaptive control by using parallel feedforward compensator //Int. J. Contr. 1994. Vol. 59. P. 1543–1565.
- 162.!!!! *Jackson E.A.* *Perspectives of nonlinear dynamics*. Vols 1 and 2., Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
- 163.!!!! *Johnson G.A. and Hunt E.R.* Controlling chaos in a simple autonomous system: Chua's circuit //Int. J. Bifurcation and Chaos. 1993. Vol.3(3). P. 789–792.
- 164.!!!! *Kaufman H., Bar-Kana I., Sobel K.* Direct adaptive control algorithms. New-York: Springer-Verlag, 1994.
- 165.!!!! *Kreisleimeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence //IEEE Trans. AC., 1977. Vol. 22. P. 2–8.
- 166.!!!! *Kreisleimeier G.* On adaptive state regulation //IEEE Trans. AC., 1982. Vol. 27. P. 3–17.
- 167.!!!! *Kudva P., Narendra K.S.* Synthesis of an adaptive observer using Ljapunov's direct method. //Int. J. Control. 1973. Vol. 18, № 6. P. 1201–1210.
- 168.!!!! *Konjukhov A.P., Nagibina O.A., Tomchina O.P.* Energy based double pendulum control in periodic and chaotic mode //Proc. of 3rd Intern. Conf. on Motion and Vibration Control (MOVIC'96), Chiba, Japan, 1996, P. 99–104.
- 169.!!!! *Li T., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol.82. P. 985–992.

- 170.!!!! *Lindorff D.P., Carrol R.L.* Survey of adaptive control using Lyapunov design //Int. J. Contr., 1973. Vol. 18, № 5. P. 897–914.
- 171.!!!! *Lion P.M.* Rapid identification of linear and nonlinear systems //AAIAA J. 1967. Vol. 5. P. 1835–1842.
- 172.!!!! *Ljung L.* System identification toolbox: manual, The MathWorks Inc., Sherborn, Mass., 1986.
- 173.!!!! *Luders G., Narendra K.S.* Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems. //IEEE Trans. AC. 1974. Vol. AC-19. № 3, P. 841–847.
- 174.!!!! *Luenberger D.G.* Introduction to dynamic systems. NY: Wiley, 1979, 446 P.
- 175.!!!! *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow //J.Atmospheric Science. 1963. Vol. 20. № 2, P. 130–141 (Перев. в кн. "Странные аттракторы". М.: Мир, 1981. С. 88–116).
- 176.!!!! *Markov A.Yu., Fradkov A.L.* Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification //IEEE Trans. Circ. and Syst. 1997. № 11. P.905–912.
- 177.!!!! *Mareels I.* A simple self-tuning controller for stable invertible system //Syst. Contr. Letters. 1984. Vol. 4. P. 5–16.
- 178.!!!! *Nam K., Arapostathis A.* A sufficient condition for local controllability of nonlinear systems along closed orbits //IEEE Trans. AC. 1992. Vol. 37(3). P. 378–380.
- 179.!!!! *Nuyan S., Carroll R.L.* Minimal order arbitrary fast adaptive observers and identifiers //IEEE Trans. AC. 1979. Vol 24. P. 289–297.
- 180.!!!! *Ott E., Grebogi C., Yorke J.* Controlling chaos //Physical Review Letters. 1990. Vol. 64 (11). P. 1196–1199.
- 181.!!!! *Pecora L., Carroll T.* Synchronization in chaotic systems. Phys.Rev.Letters. 1990. Vol. 64. P. 821–824.

- 182.!!!! *Pogromsky A.Yu.* Passivity based design of synchronizing systems //Int.J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8. № 2, P. 295–320.
- 183.!!!! *Roy R., Hunt E., Murphy T.W. et al.* Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system //Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68. № 9, P. 1259–1262.
- 184.!!!! *Petrov V., Gaspar V., Masere J., Showalter K.* Controlling chaos in Belousov-Zhabotinsky reaction //Nature. 1993. Vol.361. 240 P.
- 185.!!!! *Pogromsky A.Yu.* Synchronization of semipassive systems //Proc. 1st Intern. Conf. "Control of Oscillations and Chaos", St.Petersburg, Aug. 27–29, 1997.
- 186.!!!! *Proceedings of 6th St.Petersburg Symposium on Adaptive Systems Theory.* Vol. 1,2. St.Petersburg, 1999.
- 187.!!!! *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence //Comm. Math. Physics. 1971. Vol. 20. № 2. P. 167–192 (Перевод в кн. "Странные аттракторы". М.: Мир, 1981. С. 116–151).
- 188.!!!! *Samuelson P.A.* Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration //Rev. Economic Statistics. 1939. Vol. 21, № 7. 1939. P. 75–78.
- 189.!!!! *Sannuti P.* Direct singular perturbation analysis of high-gain and cheap control problems //Automatica. 1983. Vol. 19. P. 41–51.
- 190.!!!! *Sobel K., Kaufman H., Mabius L.* Implicit adaptive control for a class of MIMO systems //IEEE Trans. Aerosp. Electr. Syst. 1982. Vol. 18. P. 576–590.
- 191.!!!! *Stotsky, A.A.* Combined adaptive and variable structure control //Variable Structure and Lyapunov Control, /Ed: A.S.I. Zinober. London: Springer-Verlag. 1994. P. 313–333.
- 192.!!!! *Turing, A.M.* The chemical basis of morphogenesis //Philos. Trans. Royal Soc. 1952. Vol. B237(641). P. 37–72.

## Предметный указатель

- Абсолютная устойчивость 287  
Автоколебания 235  
Автономная система 109  
Авторезонанс 365  
Адаптивная идентификация 330  
Адаптивная синхронизация 393  
Адаптивная система 309  
Адаптивное управление 182  
Адаптивный наблюдатель 303, 336  
Адаптивный ПИ-регулятор 322  
Адаптивный регулятор 309  
Аксиомы совместности 16  
Активный эксперимент 330  
Алгоритм адаптации 309  
Алгоритм скоростного градиента 314, 408  
Амплитудно-фазовая характеристика 47  
Амплитудно-частотная характеристика 47  
Аналоговый прототип 310  
Аннулируемое пространство 113  
Аннулирующий многочлен 84  
Аппроксимация Паде 142  
Аппроксимация Тейлора 142  
Аппроксимация Эйлера 142  
Априорная информация 308  
Асимптотическая устойчивость в большом 271  
Асимптотическая устойчивость в целом 263  
Асимптотическая устойчивость 263  
Аттрактор 369  
  
Базис линейного пространства 80  
Базисный вектор 80  
Безразмерная частота 49  
Безусловные неравенства 413  
Беспоисковая СНС с ЭМ 315  
Бизнес-цикл 376  
Биномиальная форма 186  
Бифуркационная поверхность 242  
Блок адаптации 309  
Брюсселятор 382  
  
Вектор состояния 17  
Возмущенное движение 261  
Восстанавливаемость 168  
Вспомогательная цель 311, 322  
Второй метод Ляпунова 261  
Вынужденная составляющая 46  
Выпуклое множество 418  
Вырожденный узел 119  
  
Гармоническая линеаризация 247  
Гармонический баланс 247  
Гипер-минимально-фазовость 397  
Гипотеза Айзермана 287  
Гипотеза Калмана 288  
Гистерезис 227  
Глобальная асимптотическая устойчивость 263  
Глобальное условие Липшица 238  
Градиентные системы 275  
Грамматическая управляемости 172  
Грубые колебания 234  
Гурвицева матрица 170  
  
Двухпозиционное реле 227  
Декомпозиция процедуры синтеза 299  
Демпфирование 280  
Дескрипторная форма 65  
Дефект матрицы 172

Диагональная форма 69  
 Диаграмма Боде 47  
 Дискретная адаптивная система 310  
 Дискретная модель 134  
 Дискретная система 21  
 Диссипативность по Левинсону 267  
 Дифференциальная форма АСГ 410  
 Дифференциальное включение 294  
 Доопределенная нелинейность 295  
 Дополнительный сигнал ошибки 337  
 Допустимый закон управления 407  
 Достижимое состояние 166  
 Достижимость 168  
  
**Жесткие системы** 163  
 Жорданова форма 71  
  
 Задача анализа 242  
 Задача Коши 128  
 Задача синтеза 242  
 Замкнутая траектория 111  
  
**Идеальное реле** 227  
 Идеальный закон управления 310  
 Идентификатор состояния 183  
 Идентификационное представление 77  
 Идентификационный подход 313  
 Идентификация на скользящих режимах 333  
 Идентификация объекта 310  
 Идентифицирующий алгоритм 411  
 Импульсная матрица 129  
 Инвариантное множество 265  
 Инвариантное подпространство 83, 113  
 Индекс Пуанкаре 247  
 Интегральная невырожденность 333, 412  
 Интегральный целевой функционал 408  
 Интервал квантования 135  
 Искусственные нелинейности 222  
  
**Каноническая форма наблюдаемости** 175  
**Каноническая форма управляемости** 170  
 Канонические формы 67  
 Каскадная реализация 105  
 Квадратичная форма 274  
 Класс нелинейных блоков 287  
 Колебательное решение 236  
 Комбинированное управление 181  
 Компактное множество 274  
 Композитная система 58  
 Конвергентность в  $\Omega$  394  
 Конечная форма АСГ 410  
 Конечно-решающий алгоритм 414  
 Конечно-сходящийся алгоритм 413  
 Консервативная система 280  
 Константа Липшица 237  
 Коэффициент демпфирования 259  
 Коэффициент диссипации 364  
 Коэффициенты гармонической линеаризации 251  
 Кривая Михайлова 255  
 Кривая Найквиста 47  
 Критерии наблюдаемости 174  
 Критерии управляемости 169  
 Критерий Калмана 169  
 Критерий Попова 290  
 Критерий Сильвестра 274

- Круговой критерий 288
- Лемма Шура 296
- Лемма Якубовича–Калмана 288
- Лемма Якубовича–Калмана для систем с обратной связью 398
- Линеаризация обратной связью 358
- Линейная система 231
- Линейность относительно начальных состояний 231
- Линейность при нулевом входе 231
- Логарифмические частотные характеристики 47
- Логистическое отображение 372
- Локальное условие Липшица 238
- Локальный целевой функционал 407
- Люфт 227
- Ляпуновская экспонента 373
- Максимальная траектория 110
- Матрица наблюдаемости 174
- Матрица сопровождающая 74
- Матрица управляемости 95, 169
- Матрица Фробениуса 173
- Матрица Якоби 162
- Матричная экспонента 129
- Матричный логарифм 164
- Метод изоклин 112
- Метод наименьших квадратов 313
- Метод настраиваемой модели 313, 326
- Метод непрерывных моделей 136, 310
- Метод последовательного улучшения 313
- Метод приспособывания 245
- Метод Ракитского 144
- Метод рекуррентных целевых неравенств 313
- Метод стохастической аппроксимации 313
- Метод Тастина 143, 151, 161
- Метод точечных отображений 244
- Метод фазовой плоскости 245
- Метод Филиппова 294
- Метод функций Ляпунова 261
- Метод шунтирования 339
- Метод эквивалентного управления 296
- Методы фазового пространства 244
- Минимальная реализация 99
- Минимальный многочлен 84
- Многочастотные цифровые регуляторы 153
- Модальная матрица 82
- Модальное управление 171
- Модальный регулятор 202
- Модель внешней среды 192
- Модель-кандидат 331
- Наблюдаемая система 168
- Наблюдаемое представление 76
- Наблюдаемые канонические формы Луенбергера 97
- Наблюдатель Калмана 187
- Наблюдатель Луенбергера 187
- Наблюдатель полного порядка 183
- Наблюдатель состояния 183
- Настраиваемая модель 312
- Настраиваемый параметр 309
- Настраиваемый регулятор 308
- Насыщение 226
- Невозмущенное движение 261
- Невырожденность 169
- Невязка модели 335
- Независимые подсистемы 58

Исчезающее возбуждение 333, 412  
 Нелинейные системы 220  
 Неподвижная точка 246  
 Неподвижная точка 278  
 Непрерывная адаптивная система 310  
 Неравенство Ляпунова 333  
 Нестационарная система 20  
 Несущественные нелинейности 222  
 Неустойчивость по Ляпунову 263  
 Неустойчивый предельный цикл 235  
 Неустойчивый узел 117  
 Нечувствительность 226  
 Неявная настраиваемая модель 313, 335  
 Неявная эталонная модель 320  
 Неявные методы интегрирования 163  
 Неявные методы 143  
 Нормализуемость 168  
 Нормальная форма Коши 75  
 Нуль-пространство 113  
 Нутация 45  
 Область асимптотической устойчивости 263  
 Область диссипации 267  
 Область притяжения 263  
 Обнаруживаемость 169  
 Обобщенный настраиваемый объект 314, 407  
 Оператор дифференцирования 70  
 Оператор сдвига 70  
 Определитель Вронского 128  
 Орбита 111  
 Орбитальная устойчивость 264  
 Особые точки 112  
 Относительный порядок объема 340  
 Отображение Пуанкаре 245, 378  
 Отображение Пуанкаре 378  
 Отрезок покоя 236  
 Отрицательно определенная функция 270  
 Оценки состояния 182  
 Ошибка оценивания 184  
 Параллельный компенсатор 339  
 Параметр шага алгоритма 313  
 Параметрическая адаптация 312  
 Параметрический синтез 242  
 Пассивная система 275  
 Пассивный эксперимент 330  
 Первый интеграл 280  
 Перерегулирование 257  
 Переходная матрица 129  
 Переходная составляющая 46  
 Периодическое решение 111  
 Планирование эксперимента 331  
 Поверхность разрыва 239  
 Подобные матрицы 62  
 Подпространство управляемых состояний 169  
 Подтверждение (валидация) модели 332  
 Показатель Ляпунова 373  
 Поле скоростей 111  
 Полная наблюдаемость 93, 134  
 Положительно определенная функция 270  
 Полюса управляемости 178  
 Последовательное соединение 59  
 Постоянно-возбуждающая функция 397  
 Правило композиции 131  
 Предельная ограниченность в целом 268  
 Предельная ограниченность 267  
 Предельное множество 267

Предельный цикл 111, 234  
 Преобразование базиса 18, 60  
 Преобразование Лапласа 35  
 Прецессия 45  
 Приближенные методы 142  
 Принцип внутренних моделей 193  
 Принцип сжимающих отображений 278  
 Принцип суперпозиции 220  
 Пропорционально-дифференциальный алгоритм 316  
 Прогноз 181  
 Проектирование на множество 419  
 Пропорциональный алгоритм управления 282  
 Пространство параметров 242  
 Пространство состояний 17  
 Прямая сумма подпространств 113  
 Прямой и идентификационный подходы 311  
 Прямой метод Ляпунова 261  
 Радиально неограниченная функция 271  
 Разложение Фурье 251  
 Разрывная нелинейность 238  
 Ранг матрицы 169  
 Расширенная система 193  
 Реализуемая система 19  
 Реальный скользящий режим 292  
 Регрессор 380  
 Регуляризованный алгоритм 316  
 Регулятор с переменной структурой 291  
 Редуцированная система 167  
 Рекуррентная траектория 379  
 Рекуррентные целевые неравенства 413  
 Релаксационные колебания 369  
 Релейная характеристика 227  
 Релейный алгоритм управления 282  
 Ряд Фурье 251  
 Свойство разделения 231  
 Свойство фильтра 249  
 Сглаживание 181  
 Седло 118  
 Сектор Гурвица 287  
 Секторная нелинейность 287  
 Секущая поверхность 245  
 Сепаратриса 233  
 Сигнальная адаптация 309  
 Сигнально-параметрическая адаптация 319  
 Сигнум-функция 227  
 Сильносвязная система 166  
 Синхронизация слабой связи 395  
 Система с переменной структурой 298  
 Система Чуа 371  
 Системы динамические (инерционные) 15  
 Системы статические (безынерционные) 15  
 Скользящий режим 238, 291  
 Смещенное  $z$ -преобразование 146  
 Собственная плоскость 83  
 Собственная прямая 81  
 Собственная система 19  
 Собственное направление 81  
 Собственный вектор 81  
 Совмещенный синтез 311  
 Соединение с обратной связью 59  
 Сопрягающая частота 54  
 Сопряженное уравнение 131, 210  
 Состояние системы 15  
 Состояния равновесия 110  
 Стабилизируемость 169

Старший ляпуновский показатель 376  
 Стационарная система 20  
 Степень устойчивости 350  
 Странный аттрактор 369  
 Строгая минимально-фазовость 304, 321  
 Ступенчатая характеристика 227  
 Субградиент функции 410  
 Существенные нелинейности 222  
  
 Теорема Барбашина–Красовского 271  
 Теорема дуальности 174  
 Теорема Кэли–Гамильтона 84, 144  
 Теорема Ла-Салля 273  
 Теорема о неустойчивости 272  
 Теорема о пассивации 321  
 Теоремы Пуанкаре–Бендиксона 246  
 Теория оценивания 181  
 Точечное отображение 378  
 Точные методы 139  
 Трактриса 284  
  
 Управляемая система 167  
 Управляемое представление 74  
 Управляемость по выходу 176  
 Управляемые канонические формы Луенбергера 97  
 Уравнение Баутина 283  
 Уравнение в отклонениях 276  
 Уравнение Ван дер Поля 368  
 Уравнение гармонического баланса 254  
 Уравнение Дуффинга 368  
 Уравнение Ляпунова для дискретных систем 277  
 Уравнение Ляпунова 273  
 Уравнения состояния 19  
 Условие адаптируемости 317  
 Условие аттрактивности 266  
 Условие Липшица 237  
 Условие псевдоградиентности 408  
 Условие разрешимости 410  
 Условие роста 271  
 Условие сильной псевдоградиентности 411  
 Условие совместимости 317  
 Условие Эрцбергера 317  
 Условные неравенства 413  
 Устойчивость в малом 263  
 Устойчивость по Лагранжу 267  
 Устойчивость по Ляпунову 262  
 Устойчивость по отношению к функции 266  
 Устойчивый предельный цикл 235  
 Устойчивый узел 117  
  
 Фазовая скорость 111  
 Фазовая траектория 109  
 Фазовое пространство 17  
 Фазовый вектор 17  
 Фазовый портрет 109  
 Фазо-частотная характеристика 47  
 Фильтр Калмана 185  
 Фильтр состояния 335  
 Фильтрация 181  
 Фокус 120  
 Форма Баттерворта 186  
 Формула Коши 130  
 Фрактал 375  
 Фрактальная размерность 374  
 Фундаментальная матрица 128  
 Фундаментальная система решений 128  
 Функционал качества 309, 407  
 Функция Ляпунова 269  
 Функция Ляпунова–Лурье 276  
 Функция переключения 298  
 Функция последования 246  
  
 Хаотическая система 371

Характеристика возбудимости 365  
 Характеристика статическая 15  
 Характеристический показатель 373

**Ц**  
 Целая траектория 265  
 Целевой функционал 407  
 Цель адаптации 309  
 Цель управления 309  
 Центр 120  
 Цифровой фильтр 45

**Ч**  
 Частичная наблюдаемость 176  
 Частичная стабилизация 358  
 Частичная управляемость 169  
 Частичная устойчивость 266  
 Частота Найквиста 50  
 Частотная теорема с обратной связью 321  
 Частотная теорема 288  
 Частотная характеристика 46  
 Частотное неравенство 290  
 Частотное условие 289  
 Частотные характеристики дискретных систем 49  
 Черный ящик 331  
 Число ошибок алгоритма 414

**Ш**  
 Шунт 339

**Э**  
 Эквивалентные состояния 167  
 Экспоненциальная устойчивость 289  
 Экстраполятор 137  
 Эталонная модель 312  
 Эталонное уравнение 320

**Я**  
 Явная настраиваемая модель 313  
 Явная эталонная модель 312  
 Явные методы интегрирования 163  
 Якоби матрица 22

$\omega$ -предельное множество 273  
 $N$ -наблюдаемость 381  
 $z$ -преобразование 137

## List of Figures

1.1	Аксиомы совместности. . . . .	17
1.2	Структурная схема системы (1.2). . . . .	20
1.3	Электротехнические устройства . . . . .	25
1.4	Искусственный спутник Земли. . . . .	27
1.5	Самолет и его продольные угловые координаты. . . . .	29
1.6	Перевернутый маятник. . . . .	30
1.7	Транспортная система. . . . .	31
1.8	Переходные характеристики двигателя. . . . .	41
1.9	Амплитудно-частотная характеристика колебательного контура . . . . .	52
1.10	Диаграмма Боде летательного аппарата. . . . .	53
1.11	АЧХ транспортной системы. . . . .	55
1.12	АЧХ цифрового фильтра . . . . .	57
1.13	Структуры композитных систем. . . . .	58
1.14	Структурные схемы систем (1.15) (а) и (1.47) (б). . . . .	63
2.1	Структурная схема, соответствующая жордановой форме (2.4). . . . .	71
2.2	Структурная схема системы (2.12) (форма УКП). . . . .	75
2.3	Структурная схема системы (2.15) (форма НКП). . . . .	77
4.1	Структурная схема системы для задачи 2. . . . .	107
5.1	Поле фазовых скоростей. . . . .	112
5.2	Фазовые портреты систем второго порядка. . . . .	118
5.3	Фазовые портреты и переходные процессы в (5.8). . . . .	125
5.4	Фазовые портреты к задаче 2. . . . .	127
6.1	Области устойчивости дискретных моделей для некоторых аппроксимаций Паде. . . . .	161
7.1	Система с недостижимыми состояниями. . . . .	167
7.2	Эквивалентные состояния, $x'_0 \sim x''_0$ . . . . .	167
7.3	Канонические формы управляемости (а) и наблюдаемости (б). . . . .	171
7.4	Структурная схема к задаче 12 в). . . . .	180
8.1	Принцип построения и структурная схема наблюдателя. . . . .	183
8.2	Балансировка стержня. . . . .	190
8.3	Процесс оценивания возмущений. . . . .	196
9.1	Система стабилизации с динамическим компенсатором. . . . .	205
9.2	Процессы стабилизации ИСЗ. . . . .	212

9.3	Диаграммы Боде системы стабилизации ИСЗ с регулятором (8.20), (9.23).	213
9.4	Волна колебаний.	215
9.5	Углы поворота маятников и управление.	216
10.1	Структура нелинейной системы в виде взаимосвязанных линейной и нелинейной подсистем.	230
10.2	Сепаратрисы и предельный цикл.	234
10.3	Состояния равновесия нелинейных систем.	237
10.4	Пересекающиеся траектории и скользящий режим	240
11.1	Структурная схема генератора колебаний.	256
11.2	Точечное отображение (а) и переходная характеристика колебательного звена (б).	257
11.3	Функция последования $h = \varphi(g)$ .	258
11.4	Амплитуда колебаний генератора и ошибка ее определения методом гармонического баланса.	260
11.5	Устойчивость по Ляпунову.	262
11.6	Асимптотическая устойчивость по Ляпунову.	263
11.7	Неустойчивость по Ляпунову.	264
11.8	Орбитальная асимптотическая устойчивость.	265
11.9	Устойчивость по Лагранжу.	268
11.10	Диссипативность в целом.	268
11.11	Функция Ляпунова асимптотически устойчивой системы.	272
11.12	Графики функций $V(x(t))$ и $\dot{V}(x(t))$ для одной из реализаций процесса (11.33).	282
11.13	Процесс раскачки маятника.	283
11.14	Функция Ляпунова и фазовый портрет автоколебательной системы.	284
12.1	Блок-диаграмма модели адаптивной системы управления ЛА.	324
12.2	Блок-диаграмма модели динамики углового движения ЛА.	327
12.3	Блок-диаграмма алгоритма адаптивного управления с неявной моделью.	327
12.4	Переходные процессы по углу тангажа $\vartheta$ и управлению $\delta_b$ в адаптивной системе с неявной моделью.	328
12.5	Процесс настройки параметров и невязка алгоритма адаптации в адаптивной системе с неявной моделью.	328

12.6	Блок-диаграмма модели регулятора с переменной структурой. . . . .	329
12.7	Переходные процессы по углу тангажа $\vartheta$ и управлению $\delta_v$ в системе с переменной структурой. . .	329
12.8	Структурная схема адаптивной системы. . . . .	346
12.9	Граница области СМФ для $\eta = 0.5$ . . . . .	350
12.10	Процесс идентификации параметров ЛА. . . . .	351
12.11	Переходные процессы по углу тангажа ЛА. . . . .	351
13.1	Характеристика возбудимости маятника (13.17) при $\varrho = 0.1, \omega_0^2 = 10$ . . . . .	366
13.2	Устойчивый предельный цикл брюсселятора. . . . .	383
13.3	График $Y(t)$ для управляемого брюсселятора. . . . .	384
13.4	Хаотический аттрактор возбужденного брюсселятора. . . . .	384
13.5	График $Y(t)$ для управляемого возбужденного брюсселятора ( $y_* = 2.5$ ). . . . .	385
13.6	График $u(t)$ для управляемого возбужденного брюсселятора ( $y_* = 2.5$ ). . . . .	385
13.7	Хаотический аттрактор системы Рёсслера. . . . .	387
13.8	График координаты $Y(t)$ ( $y_* = 6$ ). . . . .	387
13.9	График управления $u(t)$ ( $y_* = 6$ ). . . . .	388
13.10	Фазовый портрет управляемой модели Рёсслера ( $y_* = 6$ ). . . . .	388
13.11	Предельный цикл первого порядка в системе Рёсслера. . . . .	389
13.12	График координаты $Y(t)$ ( $y_* = 2$ ). . . . .	389
13.13	Фазовый портрет управляемой модели Рёсслера ( $y_* = 2$ ). . . . .	390
13.14	Аттрактор системы (13.79). . . . .	401
13.15	Изменение ошибок наблюдения во время "настройки" ( $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1$ ). . . . .	404
13.16	Изменение оценок параметров при настройке. . . . .	404
13.17	Изменение ошибок наблюдения в процессе работы при $\gamma_1 = 1$ . . . . .	405
13.18	Изменение оценки параметра $s$ в процессе работы. . . . .	405
13.19	Изменение ошибок наблюдения в процессе работы при $\gamma_1 = 5$ . . . . .	406
13.20	Изменение оценки параметра $s$ ; $\gamma_1 = 5$ . . . . .	406

D.1	Примеры графических изображений пакета Scilab.	
	а – трехмерный график, б – моделирование велосипеда. . . . .	443